《自修数学》小丛书

无限数

〔英〕C.D.H.库珀 著



科学出版社

统一书号：

定　　价：

本社书号：2705 · 13

科技新书目：120-5

《自修数学》小丛书

无　　限　　数

〔英〕C. D. H. 库珀 著

刘远图 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书是《自修数学》小丛书中的一本。它从日常计数中用到的有限数开始，说明有限数的全体是无限的，并对无限能不能比较大小(或多少)，能不能进行运算(加、乘)，经过这些运算以后会不会得出更大的数等等问题，作了通俗而又生动的讲解，从而对于集合论中"势"和映射的概念作了通俗的介绍。

本书深入浅出、生动有趣，可供具有中等文化程度的广大读者阅读。

C. D. H. Cooper

INFINITE NUMBERS

John Murray, London, 1974

无 限 数

〔英〕C. D. H. 库珀 著

刘远图 译

责任编辑 陈永清 毕 颖

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1982年9月第一版 开本：787×1092 1/32

1986年6月第二次印刷 印张：2 7/8

印数：14,001—17,900 字数：54,000

统一书号：13031·1588

本社书号：2705·13—1

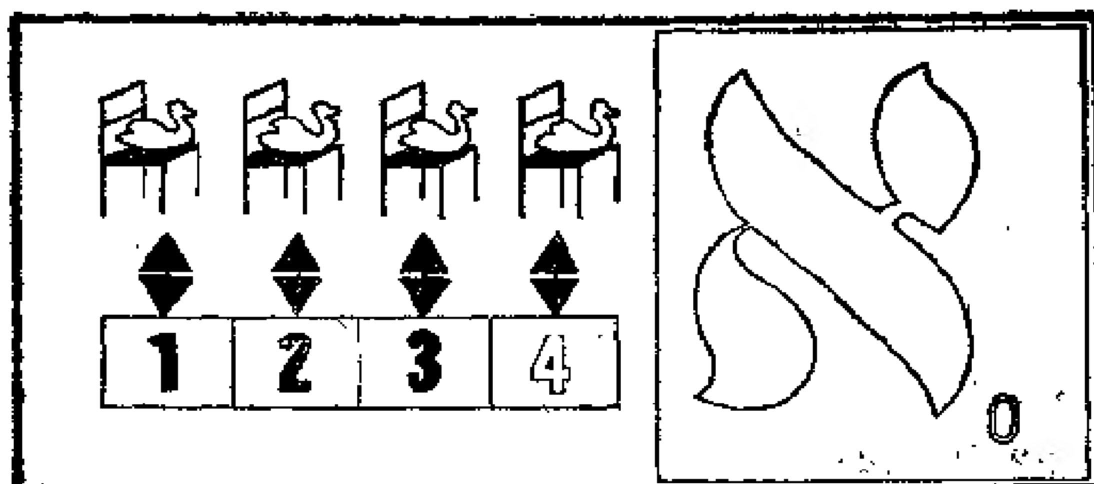
定价： 0.51 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics on Your Own）是给具有初中文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物．该丛书自1964年出版后，于1974年、1976年多次再版印刷．为开阔读者眼界、增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学
测量世界
数型
毕达哥拉斯定理
统计世界
集合、命题与运算
数学逻辑与推理
曲线
拓扑学——橡皮膜上的几何学
概率与机率
向量基本概念
有限数学系统
无限数
矩阵

目　录



一、怎样计数

1. 我们是怎样开始认数的

我们在数学里最早遇到的概念之一，是计数的概念. 我们看到画着几个同样东西的图片时，逐渐就学会了把这一组东西同某一个数联系起来. 举例来说吧，我们也许曾经看见过一张画，上面有五只鸭子，边上写着数字“5”. 我们可能天真地想到，“5”指的是鸭子，要不然就和这些实际的物体有点关系. 但是，我们以后又看到五把椅子、五支铅笔等等，都和数字“5”和“五”这个数词联系在一起，这样我们就开始得到关于“五”的概念. 以后我们又学会了不管多少的一组物体，都能抽象出它的数的性质，对于看到的各种东西也开始能数出它们有几个.

后来我们又学习处理这些数字，学习加、减、乘、除四则运

算.我们先学会用数来解算术题,以后学会用字母表示数来解答代数题. 在这个过程中,我们还学会了不同种类的数——分数、小数等等.

在本书中,我们将完全从幼儿园的水平出发讨论计数的过程,但是这里的观点却更为深刻和严谨. 例如,当我们计数时,我们没有停下来认真地考虑我们学的内容到底是怎么一回事? 我们以前确实就是这样学习过来的. 多数人永远也不会回过头再去考虑计数的本质是什么. 下面我们立刻要介绍无限数的计数方法,因此对于有限数的计数方法有一个正确的理解,就显得很重要了.

2. 相 同 的 数

有的人可能认为,计数是数学里最基本的概念. 实际上计数是一个复杂的概念,它是建立在更为基本的概念之上的.

让我们来看一看图 1 上的那些圆点吧! 只许看五秒钟,在这样短的时间里你能够数出图上有多少个圆点吗? 下面先不要读啦,先做做这个试验吧!

要数这么多点子,五秒钟当然不够. 但是你一定注意到了,那张图里有一些是黑点,有一些是圆圈. 充其量只要看五秒钟,甚至于不屑再看一眼,你就能回答下面的问题,即第二个问题: 那张图里圆圈多于黑点,还是黑点多于圆圈,还是两种一样多呢?

瞬然一瞥，当然来不及数出那么多点的个数，但是却足以看出黑点和圆圈是一样多．我们能作出这一判断，并不要求实际数出每种点子的个数．这就清楚地说明，“相同的数”的概念一定是比计数更为基本的概念．

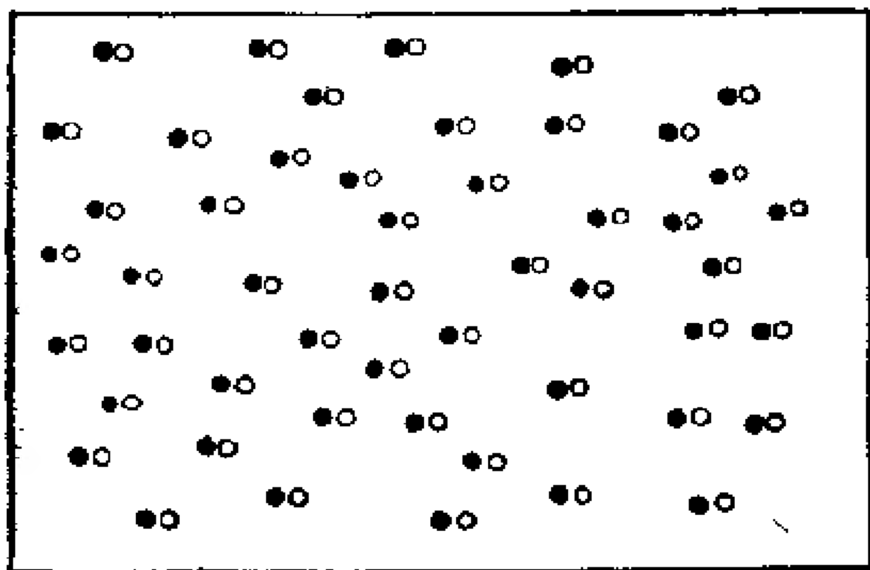


图 1

我们之所以能一眼看出黑点和圆圈恰好一样多，是因为图里黑点和圆圈是一对一地出现的．每一个黑点旁边有一个圆圈，反过来，每一个圆圈旁边也有一个黑点．把两组东西都配成对这个概念，以后我们将当作“有相同基数”的定义．

在叙述上述定义以前，我们要介绍一些专业方面的语言．基数是数学的一个分支即“集合论”中出现的一个名词．这里并不要求读者必须具备集合论方面的知识．但是，如果读者已经学过集合论方面的知识（例如本丛书中的《集合、命题和运算》），再花一些时间来使用这些专业名词也是值得的．

集合论中，一些东西的整体叫做一个集合，集合中每一件

东西叫做元素．“集合”[1]这个名词，从数学上看，并不意味着它的元素是由具有某一属性而自然聚集到一起的．在日常语言中，一些茶杯和小茶碟，除非配成套，否则我们决不会把它们叫做一个“集合”(“一套”)． 然而在集合论里，我们却可以把一些茶杯和小茶碟叫做一个“集合”．而且集合的元素也不要求是同一类型的对象． 一个集合的元素可以多种多样，例如它可以包含一支粉笔、斯里兰卡、古罗马独裁者儒略·凯撒、一个等腰三角形、一首巴哈的歌曲等等．

请注意，到现在为止我们还没有定义什么是基数，只是对“有相同基数”这一术语作了定义．

两个集合，如果其中一个集合的元素同另一个集合的元素可以一对一地完全配对(没有多余的元素)，就说这两个集合有相同的基数．

3. 数和重量

基数可以用来计算集合所含元素的多少，而重量是物体轻重的度量．以后我们总是把基数同重量进行比较．最原始的称重量的器械，也就是现在实验室还在使用的、不过已经改成现代形式的杠杆式天平． 左盘和右盘各放一个物体，那么根据哪一个盘比较低，就可以说出哪一个物体比较重． 如果横臂成水平，两个物体重量相同．

杠杆式天平不是直接秤出物体的重量．它只能比较两个

1) 集合 (Set) 这个词在英语里有“一套”、“一组”的意思．——译者

物体的重量．我们说的"用天平称重"，是指把不知道的重量同已知的重量作比较的操作过程．称重量需要有两个条件：

（1）比较重量的方法；

（2）有一些标准的重量．

对于计量集合里元素的多少，也需要有类似的两个条件：

（1）比较两个集合大小的方法；

（2）有一些标准的集合．

我们已经有一种比较两个集合大小的方法，即配对原则．剩下的是要找出一些标准的集合．

4. 标准集合

最经常用于比较集合大小的有下面这些集合：

$\{1\}$

$\{1, 2\}$

$\{1, 2, 3\}$

$\{1, 2, 3, 4\}$

…………

图2中画了几个正方形．数数看有几个！对了，是七个．



图 2

无疑你在一刹那间就数出来了，可能用了一些复杂的步骤，例如在心里把正方形分成四个一组，三个一组，然后再相

加．但是我们也可以猜想，你数的办法是慢慢地一个一个数出来的，就象一个小孩数东西那样．

你指着第一个正方形，口里喻“一”，指着后面一个喻“二”，直至数到最后一个正方形．当你指着最后一个时，你口里喻“七”．这里你做的事情是把那些正方形同标准集合{1，2，3，4，5，6，7}的元素配对．它们正好配完，因此我们就说，正方形的个数和标准集合{1，2，3，4，5，6，7}的元素个数相同．通常我们并不把这个过程说得这么复杂，而只是简单地说：“有七个正方形．”

假设有集合{13，2，56，810，19，33}和{澳洲，非洲，北美，南美，欧洲，亚洲}，它们是不是也“有相同的基数”呢？显然，回答是：“是”．然而当你仔细考察一下给出答案的过程，你就会发现步骤还是很复杂的呢！把两个集合中的一个直接同另一个集合进行比较，你未必会这样作．最可能的办法是，先数每一个集合有几个元素，得出每个集合都是六个元素．这个过程相当于把两个集合分别同另一个集{1，2，3，4，5，6}作比较．当我们数每一个集合有几个元素时，就是把这个集合同{1，2，3，4，5，6}一对一地配对．因此，根据术语“有相同的基数”的定义，上面两个集合都和{1，2，3，4，5，6}有相同的基数．在作出这两个集合有相同的基数的结论的过程中，我们不知不觉地用到了下面的传递原则：

如果集合 A 和集合 B 可以一对一地配对，集合 B 和集合 C 可以一对一地配对，那么集合 A 和 C 也可以一对一地配对．

现在，我们可以对有限集作出“基数”这个词的定义．我

们先写出下列数字表:

1, 2, 3, 4, 5, ……

如果集合 S 和{1, 2, 3, …n}“有相同的基数”,我们就定义集合 S 的基数是上列数字表中的 n. 例如,{星期日,星期一,星期二,星期三,星期四,星期五,星期六}和{1,2,3,4,5,6, 7}完全配对,所以它的基数是 7. 根据传递原则,我们知道,基数为 7 的任意两个集合,它们“有相同的基数”. 这看起来好象是不言而喻的,但是应当记住,术语“有相同的基数”是作为单独的概念定义的,那时候还没有定义基数本身.

如果两个集合的基数相同,那么这两个集合都可以和同一个标准集合一对一地配对,根据传递原则,它们就可以直接进行一对一地配对,这就是说,这两个集合有相同的基数. 这样一来,“基数相同”和“有相同的基数”的意义完全一样,因此以后我们可以随便使用哪一个术语.

5. 我们看到的第一个无限数

到现在为止,我们只讨论了有限的基数. 现在我们将定义一个无限的基数 $\aleph_0$(读作:“阿列夫零”). 为了定义 $\aleph_0$,我们需要规定相应的一个标准集合. 然后根据一个集合能不能同这个标准集合完全配对,我们就能确定它的基数是不是 $\aleph_0$.

以后我们把有限基数的全体组成的集合

{1, 2, 3, 4, …}

取作标准的$\aleph_0$集合.

现在我们就用它来度量几个无限集．由于每一个由实际物体组成的集合(甚至整个宇宙中原子的集合)都是有限集[1]，所以我们讨论无限集时，必须考虑抽象的事物组成的集合．例如我们可以把所有偶数取作一个集合：

$$\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

同标准的 $\aleph_0$ 集合比较起来，偶数集合里有多少偶数呢？我们可能会想，偶数集比标准 $\aleph_0$ 集的元素少了一半，当然偶数集比标准 $\aleph_0$ 集要小．但是实际并非如此！集合$\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$并不比集合$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$小．它们的基数相同，这是因为我们可以把每一个自然数同一个偶数配对，也可以把每一个偶数同一个自然数配对．例如，下面就是一种配对的方法：

标准集	偶数集
1 ⟷	2
2 ⟷	4
3 ⟷	6
4 ⟷	8
…………	

用这种方法可以把两个集合的元素都配成对，因此它们有相同的基数，即 $\aleph_0$.

这是无限基数具有的令人惊奇的性质之一．从一个无限

1) 这句话是不对的．宇宙是无限的，它里面存在的物质以及组成这些物质的原子也应当是无限的．——译者

集可以去掉几个元素而不会改变它的基数. 如果你对这一点感到不以为然的话(如果从任何一个集合拿走几件东西，当然就少了几件嘛!)，我们要提醒你注意：这是由于到现在为止，你数过的都是有限集合.

当我们深入进行讨论时，我们将会遇到更加令人惊奇的事情，因此我们必须忘记我们熟悉的只对有限数才成立的某些数的概念. 在这奇异事件的大海中，只有“有相同的基数”的定义(任何两个集合，当且仅当它们能够一对一地完全配对时，才有相同的基数)，才是我们能够依靠的稳固的巨锚.

假设我们取完全平方数组成一个集合：

$$\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots\}$$

这时我们可能会天真地想到，这个集合里的元素要比集合{1，2，3，4，5，…}的元素少许多许多，因为后一集合的大部分元素去掉之后才得到前一个集合. 但是事实却并非如此，因为我们可以把这两个集合的元素一对一地完全配对，根据定义，它们应当有相同的基数.

下列各集合的基数都是 $\aleph_0$.

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$$
$$\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\}$$
$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots\}$$
$$\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots\}$$
$$\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots\}$$
$$\{1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ \cdots\}$$

一般地有，任何可以将元素排列起来(即写成一个无限序列)

的集合，它的基数是$\aleph_0$. 这是由于我们可以把这样的集合的元素同标准$\aleph_0$集合{1, 2, 3, 4, 5, …}一对一地完全配对，例如取第一个元素同1配对，第二个同2配对，第三个同3配对，等等.

6. 超过$\aleph_0$的基数

到现在为止，我们讨论过的基数以及相应的标准集，可以列出如下：

$$\text{有限基数}\begin{cases}1 & \{1\}\\ 2 & \{1,\ 2\}\\ 3 & \{1,\ 2,\ 3\}\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

$$\aleph_0 \quad \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

现在，我们为进一步研究作好了必要的准备. 下面我们将致力于寻找除$\aleph_0$以外的无限数. 从上面的讨论可以看出，这个问题可以归结为要找出一个不可列的集合.

习　题　1

1. 指出下列集合的基数：
   a. 所有三位数的集合.
   b. 所有末位数字是9的数的集合.
   c. {1, 1/2, 1/3, 1/4, …}.
   d. $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \cdots\}$.
2. 设想你面前有无限长的一列鸽舍，共有$\aleph_0$那么多个，每一鸽舍都

住了一只鸽子．另外飞来一只鸽子，你想给它找一个鸽舍，但是所有的鸽舍里都有鸽子．这时你该怎么办呢?

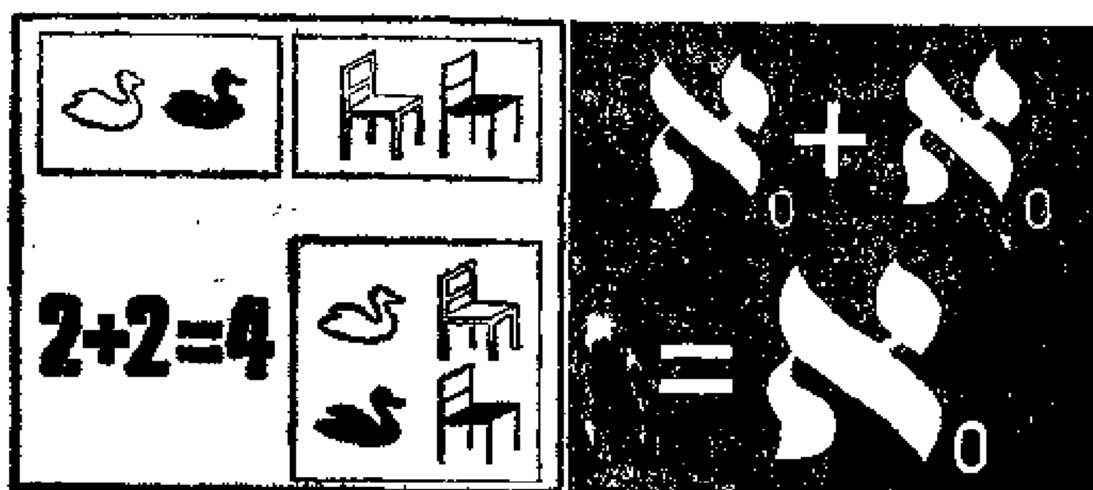
3．下面的语句，哪些是真语句，哪些是伪语句?

a．任何可以排列的集合的基数都是 $\aleph_0$．

b．如果两个集合不能一对一地完全配对，它们的基数一定不相同．

c．如果一个集合的元素同另一个集合的元素，除了后一个集合的一个元素以外，都能一对一地配对，那么这两个集合的基数不同．

d．每一个无限集的基数都是 $\aleph_0$．



二、基数的相加

当一个年幼的小孩提出"有没有一个最大的数"这样的问题时，得到的回答一定是："没有，每一个数加上一，就会得到一个更大的数"．这就是说，一个有限的基数加上一，会得到一个新的更大的有限数．前面我们发现的唯一的一个无限基数是 $\aleph_0$，而现在我们需要讨论的是如何找到一个不同的无限的基数．当然我们也可以象上面那样对 $\aleph_0$ 加上 1．而 $\aleph_0+1$ 和 $\aleph_0$ 确实不同．

然而我们必须谨慎从事，可不能把我们知道的有限数的知识统统都应用于无限的基数．前面我们已经看到，那样做会得出怎样荒谬的结果．要进行这项讨论唯一可靠的方法是要彻底地弄清楚什么是数的加法，就象前面讨论什么是计数一样．两个数相加，这意味着什么呢？

二加二得四．在幼儿园学习这道题的时候，总是先取出

两件东西(例如两个木块)，然后再取两件．第二步是把两次取的较小的集合构成一个集合．最后计算这个大的集合里有几件东西．

把两个集合放到一起构成一个集合，叫做集合的并(或和)．加法就包含着这个概念．要正确地做加法，很重要的一点是这两个集合必须不相交，也就是它们没有公共的元素．例如，让我们来考虑图3的情形．

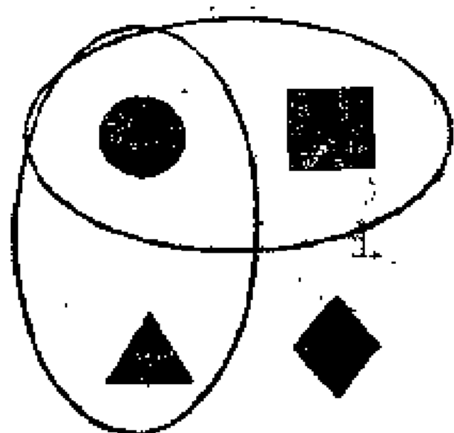


图 3

顶上一行构成集合{●，■}，左边一列构成集合{●，▲}．这两个集合的并是{●，■，▲}，它有3个元素，但是2加2应当等于4，而不是3．由于●是两个集合的公共元素，计算的结果和实际发生了差异．因此，要使加法做得正确，并到一起的两个集合不能有公共的元素．

两个(有限的或无限的)基数相加

对每个基数各取一个集合，元素的个数正好等于基数，同时要使两个集合没有公共元素；

把两个集合并到一起成为一个集合，即两集合的并集．

两个集合的并集的基数，定义为两个基数的和．

我们以3和5相加为例说明上述步骤．我们取两个集合，一个集合的基数为3，另一集合的基数为5．为此，我们可以取标准集：{1，2，3}和{1，2，3，4，5}．但是这两个

集合有公共元素. 不妨取 $\{a, b, c\}$ 代替$\{1, 2, 3\}$,用前一集合来表示 3. 现在取两个集合的并集,得到 $\{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 我们需要找一个标准集,恰好能和所得并集一对一地配对. 显然,$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$就是这样的集合. 由于这两个集合能一对一地配对,所以$\{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$的元素的个数是 8. 因此,$3+5=8$.

上面讲的步骤这样冗长、拐弯抹角,初听起来好象没有必要这样做,然而这里却说明了 3 加 5 的基础是什么. 这样不厌其烦地、充分地对有限数的加法进行分析,对于下面说明无限数的加法来说,是至为重要的.

1. $\aleph_0+1=\aleph_0$

现在让我们来看看 $\aleph_0$ 和 1 怎样相加,计算的过程和前面讲的完全一样. 含有 $\aleph_0$ 个元素的集合最好取标准集: $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$,含有一个元素的集合可以取集合$\{0\}$. 两个集合的并集是$\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$. 从前一章我们知道,由于这个集合里的元素可以写成一列,所以元素的数目应当是 $\aleph_0$.

这样便得到 $\aleph_0+1=\aleph_0$, 而不是得出一个新的无限基数. 在往下讲以前,我们先来解答读者可能提出的一个问题: 如果 $\aleph_0+1=\aleph_0$, 那么等式两边都减去 $\aleph_0$, 岂不会得到 $1=0$. 看来上面什么地方一定有错. 但是错误并不是错在 $\aleph_0+1=\aleph_0$, 引起错误的原因在于无限的基数不能做减法.

那么到底什么是减法呢？“八减五”是指“一个数，它加上 5 的和是 8”．这个数就是 3．同时只有 3 这个数加上 5 才等于 8．但是我们能使 $\aleph_0-\aleph_0$ 具有什么意义呢？如果减法可以施行，那么减得的结果应当是“一个数，它加上 $\aleph_0$ 的和是 $\aleph_0$．”但是这里又有麻烦：许多数具有这种性质．例如，0 和 1 就都有这种性质．实际上，任何一个有限数加上 $\aleph_0$ 的和都是 $\aleph_0$．这样一来，$\aleph_0-\aleph_0$ 的结果不是唯一的一个数，所以这种情况下减法没有意义．

2. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

我们的目的是想找到不同于 $\aleph_0$ 的无限基数，而且前面看到，$\aleph_0+1$ 不是．那么 $\aleph_0+\aleph_0$ 是不是呢？

首先，我们取两个不相交的集合，每一个有 $\aleph_0$ 个元素．我们可以取一个集合是{1，2，3，4，…}，另一个是{－1，－2，－3，－4，…}．两个集合的并集是

$$\left\{\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\cdots\cdots & \\ -1, & -2, & -3, & -4, & \cdots\cdots\cdots\end{matrix}\right\}$$

照这种排法，这个集合还没有写成一列．但是我们可以把这两列照下面这样写成一列：

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \cdots\}$$

上面我们把两列中的数一个间一个地写成一列，就象把两副纸牌洗成一叠一样．

由于相应于 $\aleph_0+\aleph_0$ 的集合是可以写成一列的集合（即

可列集合)，而每一可列集合的基数是 $\aleph_0$，所以 $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$. 显然，要超越 $\aleph_0$ 这堵栅栏，我们必须找到更强有力的工具. 另外可以再试一试的，无疑是乘法.

习　题　2

1. 下列基数中，哪些是相等的?

$$\aleph_0+\aleph_0,$$
$$\aleph_0$$
$$1+\aleph_0,$$
$$\aleph_0+1,$$
$$\aleph_0+10.$$

2. 把下列集合的元素和标准集 $\aleph_0$ 的元素一对一地配对，证明这个集合的基数是 $\aleph_0$.

$$\left\{\cdots,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots\right\}$$

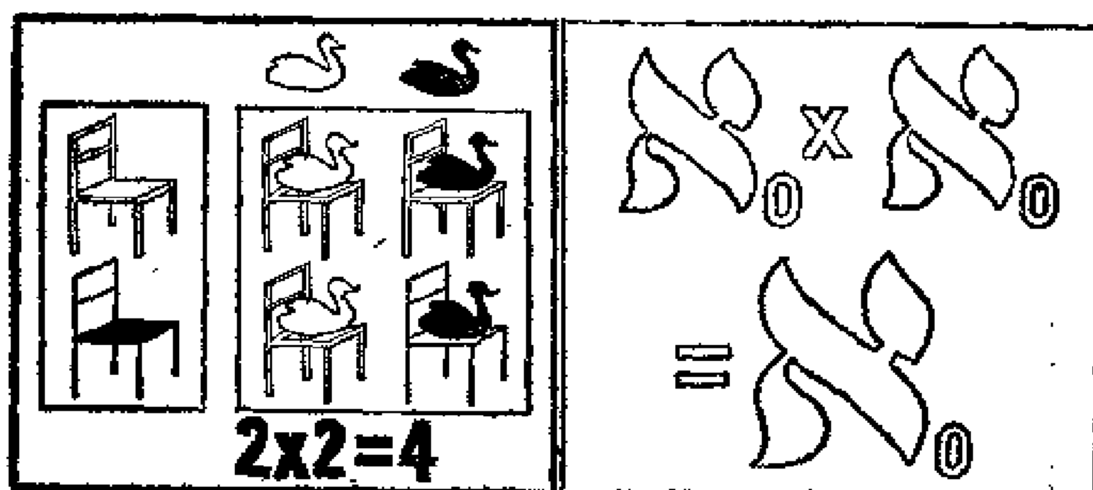
3. 对于基数的加法来说，下面哪些式子总是正确的?

a. $m+n=n+m$;

b. $(r+s)+t=r+(s+t)$;

c. 如果 $m+t=n+t$，那么 $m=n$;

d. $m+1=m$.



三、基数的相乘

同前面讨论计数和加法一样，对于乘法，我们也必须从最基本的讲起. 三乘四就是"4 + 4 + 4"，结果当然是 12. 乘法就是重复的加法. 但是，我们不能把这种理解推广应用于无限的基数，否则$\aleph_0$乘 3 应当是 3 + 3 + 3 + ⋯，但是这个式子却没有意义. 因此，我们必须想别的办法去处理.

图 4 是一张地图，上面画了 12 个点.

地球上任何一点都可以用两个量——纬度和经度——来刻划它的位置. 图 4 上 12 个点的位置是:

(西经 3°，北纬 52°)，　(西经 2°，北纬 52°)，
(西经 1°，北纬 52°)，　(0°，北纬 52°)，
(西经 3°，北纬 51°)，　(西经 2°，北纬 51°)，
(西经 1°，北纬 51°)，　(0°，北纬 51°)，
(西经 3°，北纬 50°)，　(西经 2°，北纬 50°)，

（西经 1°，北纬 50°），　（0°，北纬 50°）.

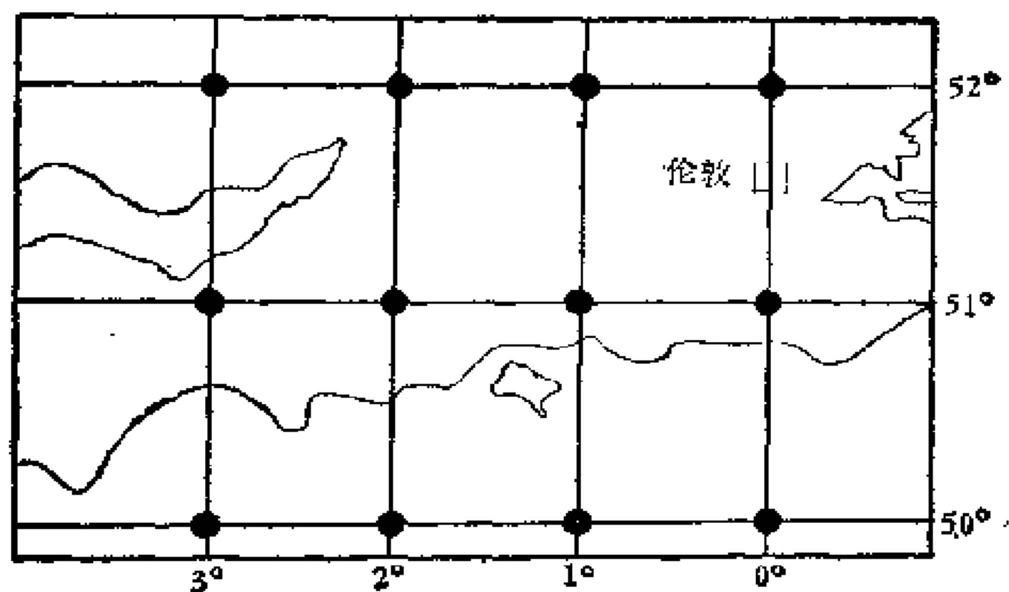


图 4

这里用了三个纬度和四个经度，结果配成了不同的十二对，因此地图上相应有十二个位置．从这里自然想到，有限数的乘法可以和元素对联系起来考虑．这样我们就可以把这个概念加以推广，使它适用于无限基数的情况．

任意两个基数相乘，先取两个集合，使它们的元素个数分别等于已知基数．

两个数的积，等于两个集合可能组成的全部元素对的基数（每一元素对的前一元素属于第一个集合，后一个元素属于第二个集合）．

上面我们就是用这个定义来做 3 乘 4 的．我们把三个纬度{北纬 50°，北纬 51°，北纬 52°}取作三个元素的集合，四个经度{0°，西经 1°，西经 2°，西经 3°}取作四个元素的集合．在元素对的前面位置上写一个经度，后面位置上写一个

纬度，这样组成的所有元素对的个数为 12，正好等于 3 和 4 的积。

1. $2\times\aleph_0=\aleph_0$

相应于数2，取集合{ +，－ }；相应于数 $\aleph_0$，取集合{1，2，3，4，…}。这两个集合组成的所有元素对的集合是{+1，－1，+2，－2，+3，－3，…}，从前面我们知道，这个集合的基数是 $\aleph_0$。

2. $5\times\aleph_0=\aleph_0$

假设我们取{1，2，3，4，5}和{1，2，3，…}分别为相应于 5 和 $\aleph_0$ 的集合。因为写元素对时两个集合是一前一后分开写的，所以我们并不要求两个集合不能有公共的元素(而加法却是这样要求的)。由这两个集合的元素组成的元素对的集合，可以写成一列，所以它的基数是 $\aleph_0$。例如，我们可以象下面这样把元素对排成一列：

(1，1)，(2，1)，(3，1)，(4，1)，(5，1)，(1，2)，
(2，2)，(3，2)，(4，2)，(5，2)，(1，3)，(2，3)，…

3. $\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$

对乘法运算来说，要得到最大的效果，我们一定会想到试一试 $\aleph_0\times\aleph_0$。但是这种尝试仍然不能突破 $\aleph_0$ 这一栅栏，因

为 $\aleph_0 \times \aleph_0$ 仍然是 $\aleph_0$. 为了验证这一点，我们可以取两个完全相同的集合，即{1, 2, 3, …}. 由这样两个集合组成的数对，可以写成下表的形式：

(1, 1),(1, 2),(1, 3),(1, 4),……
(2, 1),(2, 2),(2, 3),(2, 4),……
(3, 1),(3, 2),(3, 3),(3, 4),……
(4, 1),(4, 2),(4, 3),(4, 4),……
(5, 1),……

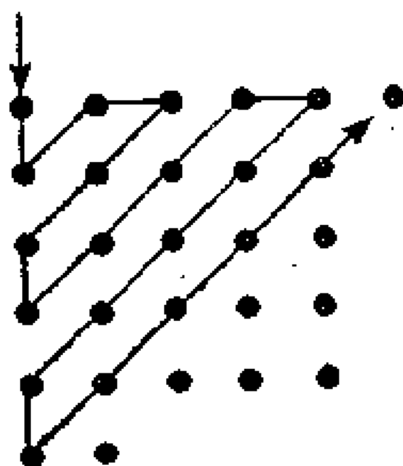


图 5

为了证明这些数对的个数正好是 $\aleph_0$, 我们需要把它们排成无限的一列. 我们可以象下面这样排：

(1, 1),(2, 1),(1, 2),(1, 3), (2, 2) (3, 1), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (1, 5)……

这种排法的顺序可以从图 5 中清楚地看出：如果用点代表数对，连接这些点的折线就形成一列.

每一个数对一定在这列的某个位置上出现. 这样我们便证明了 $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. 很显然，要跳出 $\aleph_0$ 这个圈子，必须要找到比乘法更为有效的运算才行.

4. 分 数 集

这里我们可以暂时中断盲目的努力探寻. 设有 $\aleph_0$ 个有

限数：1，2，3，….倘若把所有分数排列到这些数的中间，是不是能作得到呢？能不能把分数都排成一列呢？分数是不是太多了呢？很明显，把分数按照从小到大的顺序一个接一个地排列起来，那是根本不可能办到的．例如把1作为这一列的第一个元素，那么任何一个分数都不能是这一列中的第二个元素．这是由于比1大的分数当中，你不可能找到一个最小的分数．但是，虽然不能按大小的顺序把分数排成一列，但还是有别的办法排成一列．因为一个正分数可以看作是两个正整数组成的数对[1]．例如，1/2可以看作是数对(1，2)，2/3看作是(2，3)，3看作是(3，1)．我们知道，这样的数对只有$\aleph_0$那样多个．

前面我们盲目的努力终于失败，因此要继续寻找大于$\aleph_0$的数，只能求助于比乘法更强有力的运算．这就是将一个数乘方的运算．

习 题 3

1．图6中的点排列成一个方阵，在各个方向都是无限延伸着的．从其中一点开始，怎样才能画一条线通过每一个点(假如这条线永远继续下去的话)，把这些点排成一列呢？

在这一无限的方阵中有多少点呢？

---

1) 实际有许多数对对应于同一个分数．例如1/2不仅可以看作是数对(1，2)，也可以看作是数对(2，4)，(3，6)等等．当我们把这些数对排成一列时，我们可以看作是一列分数，但是其中包括了一些重复的分数．把这些重复的分数删去以后，当然不会使这一列分数的个数增加．

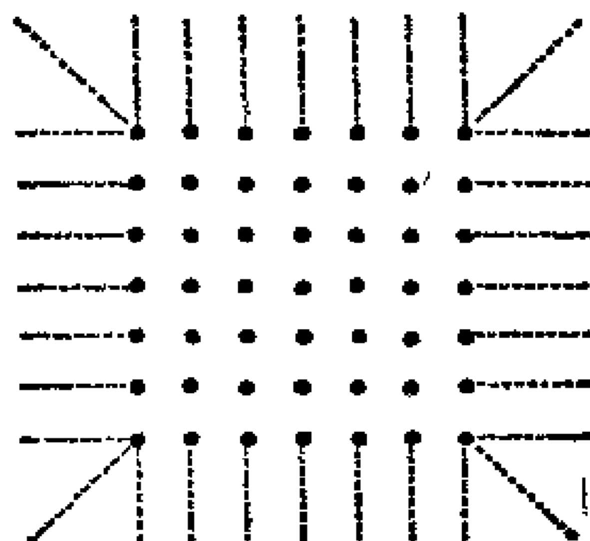
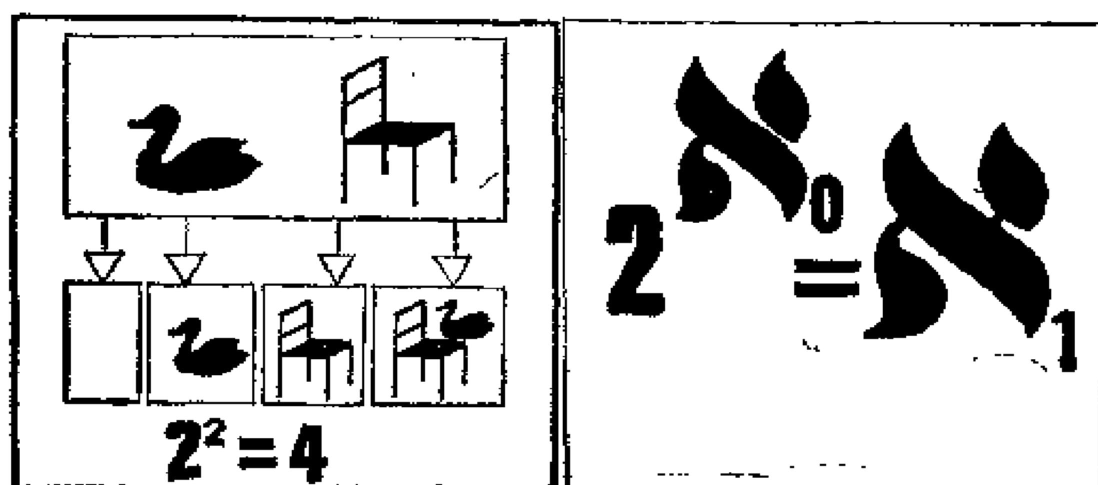


图 6

2. 下面的推理中，错在哪里？

$$2\aleph_0=\aleph_0,$$
$$\therefore 2=\aleph_0/\aleph_0=1.$$



四、幂　　集

我们看看 2 的幂：

$$2^2=2\times2=4,$$
$$2^3=2\times2\times2=8,$$
$$2^4=2\times2\times2\times2=16,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

当 n 是一个正整数时，2^n 随着 n 的增大而迅速增大．例如，$2^{10}=1024$，而 2^{20} 要超过一百万．2^{20} 当然比 2×20 和 $2+20$ 都大．乘方这种运算比加法和乘法要强有力得多．也许我们利用乘方可以突破 $\aleph_0$ 这堵栅栏．

在考虑 $2^{\aleph_0}$ 以前，我们必须再一次回顾最基础的知识，从而找到乘方的一种解释，以便推广到无限基数的情况．

设有一个集合$\{1, 2, 3\}$，并写出它的所有子集，也就是由这三个元素可能组成的一切集合．包含这三个元素的集合

只有一个，即{1，2，3}．包含两个元素的子集是{1，2}，{1，3}和{2，3}，包含一个元素的子集是{1}，{2}，和{3}．以上一共有七个子集．还有一个子集我们没有列入，这就是没有元素的集合，即空集{ }．把什么也没有的东西叫做集合，看起来好象有些荒谬，然而在集合论里，为了理论上的完整，"集合"这个名词也包括空集在内．

这种情况和"页"这个名词有些相似．我们会说某一本书最后一页是第92页（这里"页"是指印刷品的页次，而不是一张纸的一页），但是这一页里却连一个字也没有．作为印刷符号的集合来讲，第92页就是一个空集．

因此，{1，2，3}的子集总共有 $2^3=8$ 个．任何含有两个元素的集合，它的子集（包括空集在内）共有 $2^2=4$ 个；只有一个元素的集合，它的子集共有 $2^1=2$ 个，即它本身和空集．一般地说，如果 n 是有限基数，那么含有 n 个元素的集合，它的子集共有 2^n 个[1]．现在我们可以将这种观点推广到无限集的情形．

求2的任意次幂（有限基数或者无限基数），只须取含有幂指数那么多个元素的一个集合，然后求出这个集合的所有子集组成的集合（叫做幂集）．幂集的基数就等于所求的2的任意次幂．

1）从含有 n 个元素的集合中选出一个子集，相当于对每一个元素根据它是否属于这个子集而判断它"是"或"不是"．例如对空集来说，这 n 个元素中每一个都"不是"空集的元素．因为 n 个元素中每一个都有两种选择，所以总共有 $2\times2\times2\times\cdots\times2=2^n$ 种不同的选法，因此有 2^n 个不同的子集．

1. $2^{\aleph_0}$ 不 等 于 $\aleph_0$

根据上面的定义，$2^{\aleph_0}$ 就是任一个有 $\aleph_0$ 个元素的集合的子集的个数. 如果我们取标准集{1, 2, 3, ···}表示$\aleph_0$，$2^{\aleph_0}$ 就是由有限数组成的所有集合的个数. 下面我们将证明，$2^{\aleph_0}$ 不等于基数 $\aleph_0$ 本身.

证明的方法是数学中很普通的方法——*归谬法*. 这种方法的根据是：任何一个假设，通过正确的推理而导致错误的结论，那么这个假设本身就是错误的. 归谬法在日常生活中也经常应用. 例如，“你不可能把钥匙放在这桌子上，否则它应当还在这儿”. 这里提出的假设是“你把钥匙放在这桌子上”.从这个假设得到的结论(假定没有任何人动钥匙)是：钥匙应当还在桌子上. 但桌子上又没有钥匙，所以假设是错误的.

现在我们假设“$2^{\aleph_0}=\aleph_0$”，用归谬法证明 $2^{\aleph_0}$ 不等于$\aleph_0$. 我们将会看到，从这个假设出发会引出矛盾，从而得出假设是错误的.

因此，我们设 $2^{\aleph_0}=\aleph_0$，然后看看从这个假设会得出什么结果. 这个假设说明，集合{1, 2, 3, [illegible]数，和这个集合里的元素的个数正好一[illegible]对于有限集来说，显然不可能出现这种情况，但我们在前面看到[illegible]于有限集不可能成立的事情，对无限集却可以变成可能的事情.

如果 $2^{\aleph_0}=\aleph_0$，那么就应当可以把{1, 2, 3, ···}的

元素同它的子集一对一地配对．假定已经这样做了．也就是说，恰好有一个元素和每一个子集对应，反过来，也恰好有一个子集和每一个元素对应．如果一个元素属于它所对应的子集，我们把它叫做*内部元素*，反之则叫做*外部元素*．和空集对应的元素，显然是外部元素；和全集对应的元素当然是内部元素．不管哪一个元素，要么是内部元素，要么是外部元素，二者必居其一．

现在我们看到，所有外部元素组成的集合也是一个子集，因此也应当有一个元素同它对应．我们要问："这个元素是内部元素，还是外部元素呢?"答案是"都不是"．这样一来就出现了矛盾，因此只能放弃这个假设 $2^{\aleph_0}=\aleph_0$.

为什么说"都不是"呢? 让我们分别就每一种情况作讨论．假设和外部元素的集合对应的元素本身是*外部元素*．那么这个元素不属于它所对应的子集；换句话说，它应当不是外部元素．这个假设等于说："如果一个元素是外部元素，它应当不是外部元素"．这就得到了矛盾．

另一种情况呢? 假设和外部元素的集合对应的元素本身是*内部元素*．那么这个元素应当属于它所对应的子集，因此，它应当是外部元素．这个假设等于说："如果一个元素是内部元素，它应当不是内部元素"．这样又得到了矛盾．

两种可能的情况都得到了矛盾的结果．但是又只有这两种可能的情况，加上推理也是正确的，所以错误只可能来源于原来的假设．因此，$2^{\aleph_0}$ 不等于 $\aleph_0$.

2. 基数的大小顺序

我们自然会想到，$2^{\aleph_0}$ 比 $\aleph_0$ 大. 这里又会提出一个问题，"比……大"是什么意思呢？以前我们对于基数相等作了仔细的定义，同时由于有了定义，我们就能准确地说出"不等"的意义. 但是当我们把"比……大"应用于说明两个基数的关系时，它具有什么意义呢？我们给出如下的定义：

如果(a)一个基数对应的集合有一个子集同另一个基数对应，而且(b)这两个基数彼此不等，那么前一基数大于后一基数。

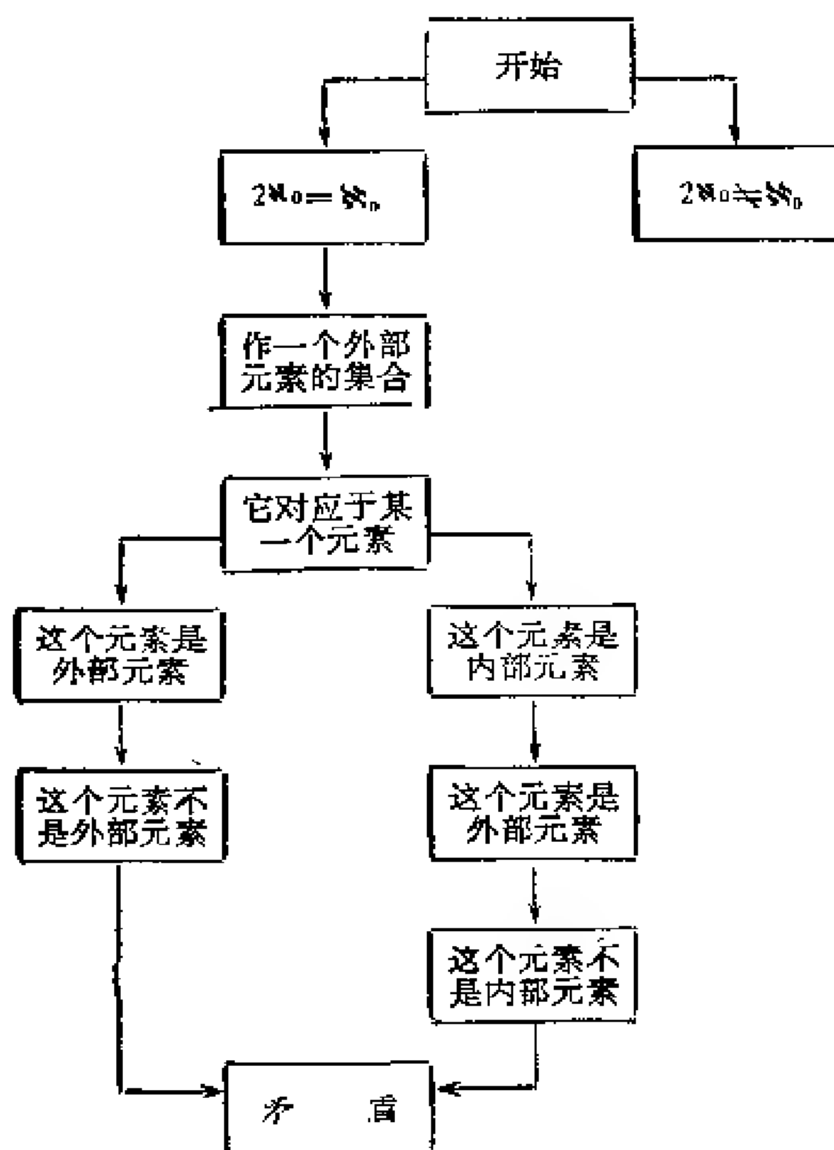
根据这个定义，5 比 3 大，理由是这两个数不等，而且基数 5 对应的集合{1, 2, 3, 4, 5}有一个子集{1, 2, 3}，它的基数是 3. 对于有限基数来说，这个定义和我们大家都熟悉的"大于"的概念是一致的.

根据这个定义，我们还可以知道，$\aleph_0$ 比任何一个有限基数都大. 例如，$\aleph_0$ 比 1000000 大，因为这两个数不等，而且基数 $\aleph_0$ 对应的集合{1, 2, 3, …}有一个子集{1, 2, 3, …, 1000000}，它的基数是 1000000.

我们已经证明，$2^{\aleph_0}$ 不等于 $\aleph_0$. 剩下来还要证明有一个基数为 $2^{\aleph_0}$ 的集合，它有一个基数为 $\aleph_0$ 的子集. 我们知道，{1, 2, 3, …}的所有子集组成的集合，它的基数是 $2^{\aleph_0}$，而这些子集中只含有一个元素的子集{1},{2},{3},…，正好有 $\aleph_0$ 那么多个，因此，$2^{\aleph_0}$ 大于 $\aleph_0$.

3. $\aleph_0$的界限已经打破

我们终于打破了 $\aleph_0$ 的界限. $2^{\aleph_0}$ 远远超过了 $\aleph_0$. 我们把 $2^{\aleph_0}$ 记作 $\aleph_1$. 在继续往下讲以前，先总结一下前面的论证，不会是没有益的. 用流程图的形式来表示论证的过程，也许是简单明了的一种办法.

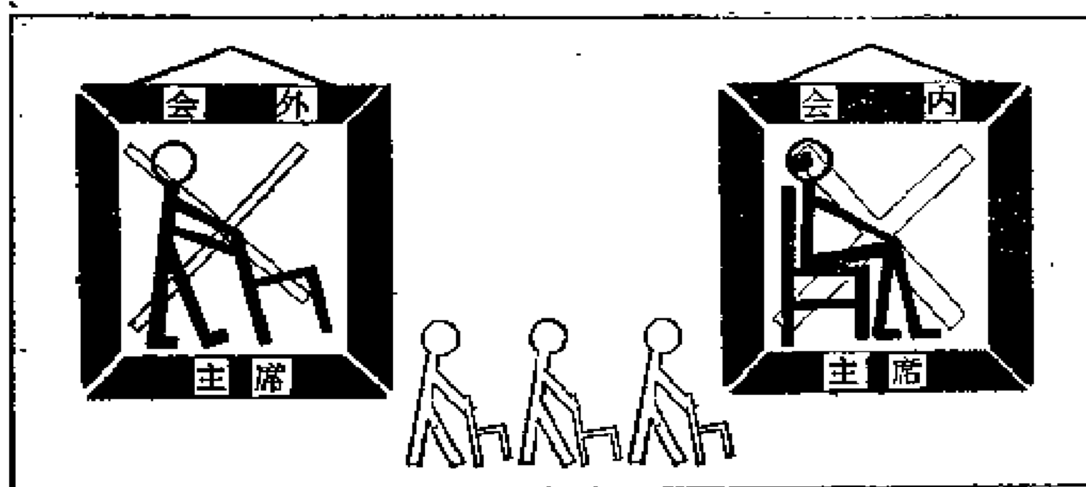


我们已经成功地冲破了 $\aleph_0$ 的界限，现在理应享受一个假

日了. 让我们在那幻想的王国即无限之中去度过这一天吧！下面我们要讲一个故事，在这个故事里包含了上面所作的论证的线索. 你能不能自己找出这个线索呢？

习　　题　　4

1. a. 写出{1, 2, 3, 4}的所有子集.
   b. 一共有多少子集？
2. a. {1, 2, 3, …}的子集当中，只有一个元素的子集总共有多少？
   b. 至多只有两个元素的子集总共有多少？
3. 下面的论证中，错在哪里？
   "{1, 2, 3, …}的子集可以象下面这样排成一列：
   第一个位置上放上空集，然后{1}；再取前面没有排上的子集{1, 2}；再取前面没有排上的子集{1, 2, 3}；再取前面没有排上的子集{1, 2, 3, 4}，其余依此一直排下去.
   每一个子集都会排在这一列中，因此子集的个数应当等于 $\aleph_0$. 所以 $2^{\aleph_0}=\aleph_0$".
4. {1, 2, 3, …}有多少个有限的子集？



五、无限的王国

我们要讲的这个故事，发生在离我们很远很远的一个王国里．这个王国叫做无限的王国．这儿生活着和人很相似的一种生物，但是身材却十分矮小．这种生物叫做无限．关于无限这种生物，除了它们有无限多这一点以外，其余没有什么值得描述的特点了．它们住在唯一的一条大路——东西大道——的两边．东西大道向东西两个方向无限延伸着．它的北面和南面的土地都归国王阿列夫所有．这些土地向北面和向南面一直延伸到无限远．国王阿列夫的城堡，正好坐落在东西大道中间，把东西大道分成东、西两部分．为了让东大道上的臣民能够同西大道上的臣民通行往来，国王便允许他们通过城堡附近，但是谁要通过这里都得交通行税．

在这条东西大道上根本不存在住房问题，每一个家庭都有房子住．当小孩长大成人，结婚另外组织自己的家庭时，他

们只要向大道一边的每个住民提出请求，他们就会往外面移一所房子，空出一所让他们去住.

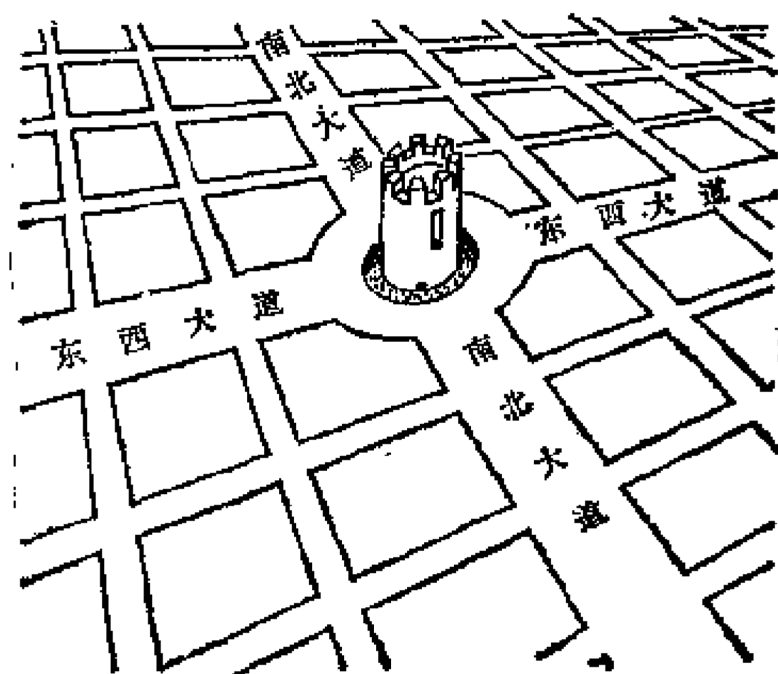


图7

但是这里的臣民并不是老住在东西大道上，事实是早在我们讨论这个问题许多许多年以前，臣民的房子已经完全盖满了国王阿列夫的所有土地. 不久，中间的城堡周围修建了一个小小的花园，外面还筑了一道围墙. 围墙的外面是一条环形的马路. 东西大道和南北大道从这里开始向四个方向无限地延伸着. 这是王国里最大的两条大道. 而其他地区都有较小的道路网，有的向着南北方向，有的向着东西方向，每条道路都向两方无限延伸着.

有一天，国王阿列夫觉得他的花园太小了，于是便发布了一道命令：从今以后，全体臣民只能住在东西大道上.

要是在一般的国家里，这道命令一定会引起严重的住房

问题．然而在这无限的王国里，由于它是无限的，它可以给每个人在东西大道上找到一所新房子．在命令指定的那天，国王派了一个使者周游这个王国．使者便从城堡最近的一所房子开始，以城堡为中心，按照螺线的形式往前行进．他将每一户(包括东西大道上的住户)在东西大道上的新住址一一通知给各家各户．使者是按螺线的形式行进的，他当然可以经过每一户而无遗漏，又由于东西大道上房子有无限多，总不会出现没有房子可分的情况．

当各家各户搬家到东西大道的新住宅时，交通的混乱真是难以想象．而已经生在这条大道上的家庭，由于要搬出很远很远，对于这次搬家很不满意．除了东西大道上的房子以外，其余的都给拆光了，土地也被国王占用．从那以后，东西大道上交通之混乱，好象永远也改不了似的，而且过去住得很近的朋友，现在却被分开，相距很多很多英里．

这次卑鄙而又暴虐的行为，只是国王阿列夫干过的许多坏事中的一件．你一定会想到，国王是多么不得人心啊！但是他的臣民仍然容忍他继续统治这个国家，这只是出于对国王阿列夫仁慈的祖先制定的古老的宪章的尊重．在这个宪章中规定，他的后裔只要执行作为一切委员会首领的义务，就有权进行统治．

世袭统治在这个无限王国里还有另外一个特点．它的臣民最热衷于把他们自己组织到各种委员会里面去．说实话，实际确实如此，当几个臣民聚集到一起时，他们就自动地形成一个委员会．

国王作为一切委员会的首领，按照宪章规定有权同时也有义务任命每一个委员会的主席．但是他必须遵守宪章的一条规定，即任何人至多只能担任一个委员会的主席(显然这一规定不允许国王自己担任每一个委员会的主席)．在国王遵守这条规定的条件下，他的臣民才容许他继续进行统治．但是，一旦他指定的人同时担任两个不同委员会的主席，或者他无法任命主席时，他就再也无权进行统治了．

各委员会的主席，可以象通常那样，从参加委员会的人员当中任命．这样挑选的主席叫做会内主席．但是也可以从委员会外任命一个人当委员会的主席，这样任命的叫做会外主席．由于宪章规定任何人至多只能担任一个委员会的主席，所以一个人既是会内主席又是会外主席的情况是不可能出现的．

有一次，这个国家的臣民为了要推翻国王，采取的第一个步骤是组织一个委员会，包括这个国家的每一个人，但就是不包括国王在内．国王当然不甘心忍受只把他一个人排除在外的侮辱，因此他就任命他自己作这个委员会的会外主席．这样一来，他也就不能再当其他任何一个委员会的主席了．

推翻国王的第二个步骤是由这个王国的一个贵族想出来的．他叫做康特尔波(意思是"可数的")．他向国王阿列夫提议，由国王组织一个只包括国王本人的委员会，同时请国王任命一位主席．由于国王已经担任上面那个委员会的主席，当然不能再让自己当这个委员会的会内主席了．因此，国王便任命康特尔波作这个委员会的会外主席．看来，康特尔波再也没有什么办法能够使国王认输了．

然而康特尔波还是想好了一个计划，让国王受骗上当．他召集除国王外每人都参加的委员会开会．国王作为会外主席，也来出席了．这个无限的王国的所有的而且有无限多的居民都聚集在东西大道的北面．康特尔波恭敬地请求国王让他提一个问题，国王应允了．

“啊，高贵的国王，作为各委员会的首领，你有权给王国的每一个委员会任命主席．因此你一定能说出，我们当中哪些人是会外主席．那么现在请您告诉我们，谁是会外主席呢！”

国王对于他的请求，一点也不介意．他指着他左边的人群说：“我左边的臣民都是会内主席．”指着他右边的人群说：“我右边的臣民都不是主席．”然后指着他前面的人群说：“在中间的人们，同我本人和我的忠实的臣民康特尔波一样，都是王国的会外主席．”

这时国王左边许多人觉得国王刚才说得不对，因为他们以前已经被任命为会外主席，怎么现在又是会内主席呢！如果他们能够证明这一点，他们就有理由说明国王没有尽到委员会首领的职责，因此他也就无权统治这个王国了．但是在这个王国里，没有一个委员会存在的时间超过几分钟，这怎么能证明国王确实是错了呢！所以如果有人说国王错了，别人只能看作是反对国王的话罢了．然而康特尔波还是想出了一个办法．

“啊，我的国王，那么请你准许召集本王国里所有会外主席开个会好吗？”

国王同意了．于是，凡是会内主席都跑到左边，不曾担任

主席的都跑到右边去了.

"国王,你看,"康特尔波说,"现在剩下来的,包括我们在内,都是王国里的会外主席吧!"

"是的,我的康特尔波."

"现在任命谁来当这个委员会的主席呢?"

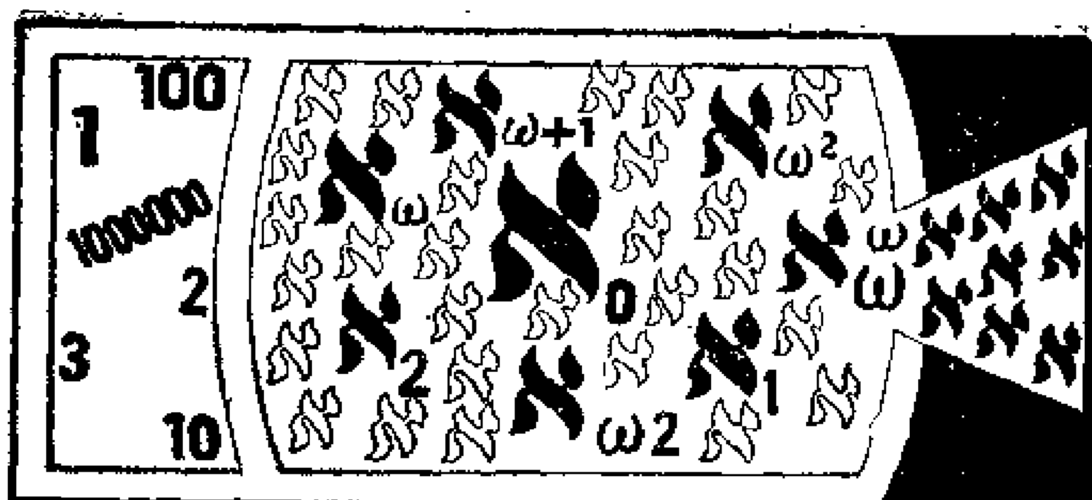
国王朝周围留下来的人群看了一遍,想从中找出一个支持他的人来,但是他预感到情况实在不妙.他很快就发现,他无法从在场的人当中挑选出一个合适的主席.因为这样挑出来的就应当是会内主席,而所有会内主席都没有参加这个会,参加会的都是会外主席.

于是国王就想到那些不在场的臣民.但是他又发现,从不在场的人当中选出的主席当然是会外主席,那么他为什么没有参加这次会外主席都来参加的会呢?国王无法摆脱困境,急得脱口而出:"我没法任命了!"

此时此刻,一场革命终于爆发了:国王被推翻了.康特尔波宣布这一天为国庆节.王国的臣民喜气洋洋地在前国王的土地上欢歌狂舞,康特尔波被推选为新的国王,但是不用说你也清楚,他再也不要"各委员会首领"这个头衔了.

习　题　5

1. 怎样才能把所有居民都迁居到东西大道的北边?
2. 按第1题的方案把居民都移居到大道的北面以后,南边的房子就都空出来了.这些空房子如果都用来作为各委员会的办公室,而且要求每一个委员会都有一间办公室,那么这些空房子够不够用呢?



六、基数的世界

国王阿列夫之所以摆脱不了困境，是由于委员会的首领的职责根本无法完成．作为委员会的首领，他必须给每一个可能成立的委员会任命一个主席，而且又不准同一个人任命两次．要作到这一点，居民的人数至少应当不少于可能成立的委员会的个数．但是，这里只有 $\aleph_0$ 个居民，却有 $2^{\aleph_0}$ 个可能成立的委员会(每一个由居民组成的集合可以看作是一个委员会)．我们从第四章看到，$2^{\aleph_0}$ 大于 $\aleph_0$．

1. 2^n 大于 n

对于任何一个基数 n 来说，2^n 大于 n 这个事实显然是对的．换句话说，对于任何一个集合 S 来说，S 的子集全体不可能同 S 本身的元素一对一地配成对． 在第四章里给出的 $2^{\aleph_0}$

大于 $\aleph_0$ 的证明当中，如果用任意一个基数 n 代替 $\aleph_0$，证明过程仍然是正确的。读者最好重新看看那里的证明，同时心里想着把每一个 $\aleph_0$ 换成 n，你会看到，证明仍然是正确的。

这样一来，我们就有办法从一个基数出发构成更大的基数。$\aleph_0$ 后面是 $2^{\aleph_0}$，记作 $\aleph_1$。$\aleph_1$后面是 $2^{\aleph_1}$，记作 $\aleph_2$。同样继续下去，我们会得到一个无限的基数序列：

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \aleph_3,\ \cdots$$

于是我们得到两列基数，一列是有限的基数，一列是无限的基数。到目前为止，我们学过的基数都比较简单，可以相当清楚地想象它到底是什么。不管怎样，无限是比较难以捉摸的，有很多基数比这些基数都大。下一节我们就着手找出其中几个。

在我们作这件事以前，读者也许会提出一个问题："讲这些内容有什么用呢?"回答是很简单的：无限基数是数学的一种有用的工具。当一个数学家在研究问题的过程中遇到两个复杂的无限集时，他需要知道这两个集合是否相等。通常他可以用"数"每个集合里的元素的个数而判断集合是否相等。基数不同，集合也就不等。但是，如果基数相同，这种办法就不适用：这时集合既可以不等，也可以相等[1]。

---

1) 这里给具有相当数学水平的读者介绍一个重要的例子，就是存在超越数的证明。超越数是实数，但它不是任何有理系数的多项式方程的解。要证明一个给定的实数是超越数(例如 π 就是这样的数)，是相当困难的，但是存在超越数而且数量众多，这个事实却很容易用无限的基数加以证明。证明的方法如下：实数的数目总共是 $\aleph_1$，而有理系数的多项式方程却只有 $\aleph_0$，其中每一个又只有有限个解——因此，总共只有 $\aleph_0$ 个实数不是超越数。因为 $\aleph_0 \neq \aleph_1$，所以有的实数一定是超越数，实际有 $\aleph_1$ 那么多个超越数。

然而对于数学家来说，用到的无限基数极少大于上面我们已经提到的那些无限基数．实际上数学家很少用到超过$\aleph_3$的无限基数．因此我们需要指出，我们之所以不限于只讨论上面列出的无限基数，并不是因为它们在数学的其他分支中有什么用处，而是因为我们对于无限的研究有很大的兴趣所致．

2．永远有更大的基数吗？

当我们认识到每一个有限基数加上1就会得到更大的基数这个事实时，这里就开始包含了最初的关于无限的概念．因为通过加1的办法，总不会找到最后一个有限的基数．但是，如果我们有一个有限基数组成的集合，那么我们并不是总能找到一个有限基数，它比这个集合里的任何一个基数都大．对于集合{1，4，9，16，25，…}来说，要找出比它的每一个基数都大的有限基数是不可能的．虽然不存在最大的有限基数，却实际存在最大的有限基数集，这就是由所有有限基数组成的集合．

把上面讲的情况同无限基数的情况作一些比较．对于任何一个无限基数来说，我们也可以找到比它更大的无限基数，因为对于任何一个基数n来说，2^n一定比n大．因此不存在最大的基数．另一方面，和有限数的情况不同，如果给定了任何一个由基数组成的集合，我们总能找到比这个集合里的基数更大的基数．有的读者也许会提出问题："什么是所有基

数的集合呢?"对于这个问题，要等到上面讲的命题得到证明以后，读者才能获得解答。

如果 S 是由基数组成的任一集合，那么一定有比集合中所有基数都大的基数。

假定我们给的基数集是 N. 我们可以给出一种方法，用它可以找到比 N 中的任何一个基数都大的基数 n. 实际上，从比较小的一些基数构造更大的基数的方法有两种，其中一种前面已经讲过了，另一种这里将只概略地予以说明. 倒底应当用这两种方法中的哪一种比较好，需视 N 是否有最大基数而定。

情形 I：*N 有最大基数 m.* 这就是说，基数 m 是集合 N 的一个基数，而且 N 中的其他的基数都小于 m. 这时我们可以简单地取 $n=2^m$. 因为 2^m 比 m 大，所以 2^m 比集合的任一基数都大。

情形 II：*N 没有最大基数.* 这就是说，对于 N 中的每一个基数来说，都可以在 N 中找到一个比它大的基数. 这时，对于 N 中的每一个基数，我们作一个集合，它的元素个数正好等于该基数. 如果 r 是 N 的一个基数，我们用记号 S_r 表示我们作的含有 r 个元素的集合. 现在我们取所有这些集合的并集. 也就是把所有这些集合的元素都合并到一个大的集合中去(这个集合记作 S). 最后，我们假设 S 的基数是 n.

这个 n 有什么用呢? 它比 N 中的所有基数都大吗? 回答是肯定的. 假定 r 是 N 中的任一基数. 由于 N 中没有最大的基数，那么在 N 中一定可以找到一个比 r 更大的基数. 我们

把它记作s. 这样一来，我们有N的两个基数r和s，它们满足下列不等式：

$$r < s. \quad (1)$$

S有一个子集含有s个元素，也就是S_s，即我们前面取的含有s个元素的集合. 这就是说，S的基数n至少和S_s的基数一样大，可以记作：

$$s \leqslant n. \quad (2)$$

比较(1)和(2)就可以得出：

$$r < n.$$

这个式子对于N中任一基数r都成立，因此n确实比N中任何基数都大.

3. 一步一步走，还是跳跃式前进

情形I构造一个大的基数的方法，我们可以看作步行时走的"一步". 我们曾经用这种方法从$\aleph_0$进到$\aleph_1$，$\aleph_2$，等等. 这样很快就得到了无限基数的一个序列.

如果我们希望找到比序列里任何一个基数都大的基数，我们必须要作一次"跳跃". 我们将用这个名词作为构造更大基数的第二种方法的名称. 下面我们用前面讲的情形II里给出的方法，求出比下列集合中所有基数都大的基数：

$$N = \{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots\}$$

对于其中每一个基数，我们都相应地构造一个集合，元素的数目正好等于那个数. 这样就得到集合$S_{\aleph_0}$有$\aleph_0$个元素，$S_{\aleph_1}$

有 $\aleph_1$ 个元素，等等．把这些集合的所有元素作成一个集合 S．S 的基数比 $\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2$，…都大．我们把它记作 $\aleph_\omega$[1]．这里我们知道怎样构造 S，但是并不关心它的元素是什么．如果详细地分析上面构造集合 S 的过程，就会看到，S 可以包含所有有限数、所有由有限数的集合组成的集合，等等．然而当我们对无限作一次纯粹智力的探讨时，既要注意这些细节，又不能使自己眼花撩乱，不知所措．我们感兴趣的是要知道对无限数能作一些什么，但是并不需要去作我们知道可以做到的事情．

4. 对 $\aleph_0$ 的另一种看法

从有限的基数到得出第一个无限的基数 $\aleph_0$ 的过程，实际也是按照情况 II 的办法，作了同样的"跳跃"．我们先看所有有限数的集合：

$$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

由于这个集合没有最大的基数，所以我们应当按照情形 II 的办法处理．对于 N 的每一个基数，我们作一个集合，它的元素个数正好等于那个基数．对于 1，我们取$\{1\}$，对于 2 取$\{1,$

---

1) 我们不能断定这样得到的一般都是唯一的基数．可以想到，当用不同的集合表示基数时，经过"跳跃"可以得到不同的基数．如果我们构造的集合是不相交的集合，得到的基数比构造的集合能一个包含另一个的情况要大．实际上，我们对这种可能性并不特别给予注意，因为这时我们可以设想 N 包含 $\aleph_0$ 个基数，而且只要出现这种情况，我们就可以证明：一定能得到唯一的基数．

2},对于 3 取{1, 2, 3},等等. 现在我们取这些集合的并集，就得到一个无限集[1]:

$$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

这个集合的基数 $\aleph_0$ 应当看作是比 N 中一切基数都大的那个基数. 通过这种办法，我们便从有限基数一下子跃进到了 $\aleph_\omega$.

5. 比 $\aleph_\omega$ 更大的基数

要构造一个比 $\aleph_\omega$ 还大的基数，这当然不成问题. 只要向前走"一步"就行了: $2^{\aleph_\omega}$ 就比 $\aleph_\omega$ 大. 我们把 $2^{\aleph_\omega}$ 记作 $\aleph_{\omega+1}$. 如果继续用这种办法往前走,就可以得到一个序列:

$$\aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \cdots$$

有没有比所有这些基数还大的基数呢? 有，只要象情形 II 那样,从这个基数集出发作一次"跳跃"就可以得到 $\aleph_{\omega+\omega}$, 也可以记作 $\aleph_{\omega 2}$[2].

从 $\aleph_{\omega 2}$ 出发一步一步扩大,就可以得另一序列:

---

1) 这样从有限基数跳跃到第一个无限基数是一种极其特殊的情况. 这时所产生的集合的基数，和前面看到的集合 N 的基数是相同的. 一般情况下可以得到一个更大的集合. 但是这并不会影响构造集合的正确性，因为给定一个集合 S(基数构成的集合)，就可以构造一个比 S 内任何基数都大的基数,但不一定比 S 本身的基数更大.

2) 写成 $\aleph_{\omega 2}$, 而不是写成 $\aleph_{2\omega}$, 其理由是: 两种下标本身都是无限数，但是性质不一样. 两个下标都是序数，而序数结合的方法应当按乘法的意义来理解,因此 $\omega+\omega$ 应当写成 $\omega 2$, 而不能写成 2ω. 由于我们在本书中不讨论序数,所以对于这个奇怪的符号只予以简单地承认.

$$\aleph_{\omega 2},\ \aleph_{\omega 2+1},\ \aleph_{\omega 2+2},\ \cdots$$

从这个序列出发作一次"跳跃"，就得到 $\aleph_{\omega 3}$，再从 $\aleph_{\omega 3}$ 一步一步扩大，就得到

$$\aleph_{\omega 3+1},\ \aleph_{\omega 3+2},\ \cdots$$

这样通过一步一步扩大和"跳跃"，我们可以得到

$$\aleph_{\omega 4},\ \aleph_{\omega 5},\ \aleph_{\omega 6},\ \cdots$$

再作一次"跳跃"，就可以得到比上面所有基数都大的一个基数．这个基数记作 $\aleph_{\omega\omega}$，即 $\aleph_{\omega^2}$．从这个基数出发，再一步一步得到 $\aleph_{\omega^2+1}$，$\aleph_{\omega^2+2}$，$\aleph_{\omega^2+3}$，$\cdots$再作一次"跳跃"，得到 $\aleph_{\omega^2+\omega}$．再一步一步作下去，然后作一次"跳跃"，就可以得到 $\aleph_{\omega^2+\omega 2}$．用这种方法就可以得到

$$\aleph_{\omega^2+\omega 3},\ \aleph_{\omega^2+\omega 4},\ \cdots$$

从这里出发作一次"跳跃"，我们就可以得到 $\aleph_{\omega^2+\omega^2}$，即 $\aleph_{\omega^2 2}$．同样可以得到 $\aleph_{\omega^2 3}$，$\aleph_{\omega^2 4}$，然后再作一次"跳跃"，便得到 $\aleph_{\omega^3}$．

这里讲的一步一步扩大和"跳跃"，实际很难想象．为了帮助想象，我们假想编一张无限基数表．不妨假定所用的纸有无限大，而且要多少张就有多少张．先取一张洁净的无限大的白纸，在它的左上角写上 $\aleph_0$．这张纸其余部分象下面那样填写．

无限基数表：第 1 页

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots\cdots$$

$$\aleph_{\omega},\ \aleph_{\omega+1},\ \aleph_{\omega+2},\cdots\cdots$$

$$\aleph_{\omega 2},\ \aleph_{\omega 2+1},\ \aleph_{\omega 2+2},\cdots\cdots$$

$$\aleph_{\omega 3},\ \aleph_{\omega 3+1},\ \aleph_{\omega 3+3},\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即使在这一页上写了无限多行，我们也不可能把这表写完，因此只好另外拿一页纸来，继续写下去．写法如下．

无限基数表：第 2 页

$$\aleph_{\omega^2},\ \aleph_{\omega^2+1},\ \aleph_{\omega^2+2},\cdots\cdots$$

$$\aleph_{\omega^2+\omega},\ \aleph_{\omega^2+\omega+1},\ \aleph_{\omega^2+\omega+2},\cdots\cdots$$

$$\aleph_{\omega^2+\omega 2},\ \aleph_{\omega^2+\omega 2+1},\ \aleph_{\omega^2+\omega 2+2},\cdots\cdots$$

$$\aleph_{\omega^2+\omega 3},\ \aleph_{\omega^2+\omega 3+1},\ \aleph_{\omega^2+\omega 3+2},\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样一页接一页地写下去，一直填满 $\aleph_0$ 页．把它们装订成册，用最好的牛皮作封面，上面用金字写上："无限基数表——第一卷"．第二卷应当从 $\aleph_{\omega^3}$ 开始．

6. 比 $\aleph_{\omega^3}$ 还大

我们将继续到很远很远的基数中去旅行，直到幻想让位于精疲力竭．然后我们就可以陶醉于无限的无限性之中了．

我们从 $\aleph_{\omega^3}$ 一步一步地扩大，加上跳跃，总可以到达 $\aleph_{\omega^4}$，$\aleph_{\omega^5}$，$\aleph_{\omega^6}$，$\cdots$ 从这里出发作一次跳跃，就可以到达 $\aleph_{\omega^\omega}$．在上面讲的无限基数表中，这一列基数排在什么地方呢？可惜，这种列表的办法并不能帮助我们多想象几步．因为 $\aleph_{\omega^4}$ 将是无限基数表第 2 个书架第一卷的第一个基数．这以前我们要填写 $\aleph_0$ 那么多卷较小的基数．同样，只有再往下填写 $\aleph_0$ 那么

多书架，我们才能接近 $\aleph_{\omega^5}$. 实际上，$\aleph_{\omega^5}$ 将是第 2 个房间第一个书架上第一卷的第一个数据. 要写到 $\aleph_{\omega^6}$ 那非得装满一座有 $\aleph_0$ 个房间的大楼. 对于 $\aleph_{\omega^7}$ 来说，那就得要装满一条有 $\aleph_0$ 座大楼的大街. 再往前写几步，那就得要装满整个城市，整个国家，整个行星，等等. 真是难以想象，要写到 $\aleph_{\omega^{100}}$ 得要装满多大的地方呢！更不用说 $\aleph_{\omega^\omega}$ 了.

虽然上面那种简单的类比是不行了，但是基数仍然在继续增大. 从 $\aleph_{\omega^\omega}$ 可以达到 $\aleph_{\omega^{\omega^\omega}}$，等等. 从所有这些再作一次跳跃，我们就会达到

$$\aleph_{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

现在，不仅仅那种类比不适用了，就连怎样写记号也无法解决了. 然而基数本身还在继续增大.

应当注意，有限基数虽然有无限多，但是它同无限基数的无限性是根本不能相比的. 虽然我们不可能实际将每一个有限数一个一个地都写出来，但是我们可以想象应当怎样去写. 而且用我们熟悉的十进制记数法就足以把全部有限数写出来. 但是无限基数却很难捉摸. 根本不能用有限的观点去理解无限基数. 实际上，无限基数确实是很难捉摸，以致于不能把它们放在一起构成一个集合. 也就是说，“全体基数的集合”是根本不存在的. 如果认为有这样的集合，就必然引出矛盾.

不妨假定 N 是全体基数的集合. 那么用一步一步扩大或者“跳跃”的办法(根据 N 的情况决定用哪种办法)，我们可以得到比 N 中任何基数都大的一个基数. 就是说，这个基数比

任何一个基数都大，当然比它本身也大．这是不可能的，因为根据"大于"的定义，它和它本身不相等．

7. 什么"集合"不是集合呢

上面提到的悖论（"悖"读作：bèi）是关于无限集的理论中许多悖论中的一个．所有这些悖论，都是由于用集合来定义的一个对象作为该集合的元素而引起的．由于集合是用它的元素来定义的，结果就只能是循环定义，因此这定义也就毫无意义了．

假如有一个人创造一个英语单词 *Ogg*，并且定义它是一件能够 *Self-thaffing*（这也是他自己创造的单词）的东西．上面的定义中，如果能确切地了解 *to thaff* 的意义，那个定义当然就完整而清楚地给出了什么是 *Ogg* 的概念．另一方面，假如这个人说"*to thaff* 某件东西"，就是要把这件东西同 *Ogg* 那样作一次操作．这个假设也是很清楚的，但是必须先了解什么是 *Ogg*．用一个单词去定义另一个单词，反过来又用后一个去定义前一个单词，无疑会把我们搞得稀里糊涂．从这两个定义中我们能够得到的只是：*Ogg* 是本身能与某件东西作比较的一件东西，而与之作比较的某件东西本身又能与某件东西作比较，……

用一个集合来定义的东西，不能作为该集合的一个元素。

如果遵守这一完全合理的法则，就不会出现任何悖

论[1]. 下面举出几个"集合"的例子，由于都不满足上述条件，实际上都是自相矛盾的. 这些集合当中，每一个都含有只能用该集合本身才能定义的一个元素.

S = 所有集合的集合. S 是 S 的一个元素.

S = 所有基数的集合.

S 的基数是 S 的一个元素.

S = 所有由两个元素组成的集合的集合.

$\{S, 2\}$是 S 的一个元素.

S = 所有不是自身的元素的集合的集合. 由于 S 和只包含一个元素 S 的集合是不同的(我们将元素 x 和集合 $\{x\}$ 看作不同的两种对象)，$\{S\}$ 不是它本身的元素，所以 $\{S\} \in S$.

集合论中最著名的悖论是罗素悖论[2]，它是从上面最后一种"集合"的研究中得出的. 如果 S 是由所有不是自身的元素的集合组成的集合，那么倘若 S 是它自身一个元素，根据定义，S 不是它自身的一个元素. 另一方面，倘若 S 不是它自身的一个元素，S 又应当是 S 的一个元素. 两种可能的情况都得到矛盾.

把上面的情况同逻辑里的下述情况作一比较是很有趣的；在逻辑里，并不是每一个象命题一样的东西都可以作为命

---

1) 就是说，集合论中所有著名的悖论，都违反了这条法则.

2) 罗素 (Lord Bertrand Russell, 1872—1970 年)，是英国的哲学家，在他有关数学基础的著作中，他第一次指出了这个问题，因此而命名为罗素悖论.

题来对待。没有意义的东西，根本不必考虑，特别是关于命题本身的那些命题，更是如此．例如，“这个命题是假命题”——如果承认这是一个命题，就会错误地导致一种悖论．因为如果命题真，就会象命题里说的那样，命题应当是假命题；如果命题不真，那么命题真！你看，这完全没有什么意义．

8. 填补空隙

前面我们用一步一步扩大的办法以及“跳跃”的办法，得到了一些很大很大的基数．当时，我们主要的目的是探讨能够得到多大的基数．现在我们回过来要问：在建立那些很大的基数过程有没有留下“空隙”呢？对于任一个基数 n 来说，2^n 大于 n．这个过程，我们曾经称为“走一步”．然而我们能不能只走半步呢？在 n 和 2^n 之间，有没有其他的基数呢？

1878 年，这个数学分支的鼻祖乔治·康托提出了一个假设：在 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间不存在其他的基数．这就是所谓“连续性假设”[1]．数学家作了多年的研究，力图证明连续统假设成立，或者在 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间确实找到一个基数，从而证明假设不成立．这个问题现在已经得到解决，但是解决的方法却出乎我们意料．1938 年，葛德尔证明了连续性假设和集合论中常用的公理是没有矛盾的．也就是说，承认连续性假设，决不会引出矛盾．这并不只是说，到现在为止还没有能证明连续性

1）$\aleph_1$ 叫做连续统的基数，也就是实数集的基数．

假设是错误的，而是说根本不可能证明这个假设是错误的。这是不是说它已经证明是正确的呢？不是。1963年，P. J. 柯亨证明了如下的事实：连续性假设对于集合论中常用的公理是独立的，因此即使否定连续性假设，也不会导致矛盾。这个结果说明，从集合论常用的公理出发，根本不可能证明连续性假设是正确的。

在 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间有没有一个基数呢？回答是：不知道，我们什么也不能告诉你。葛德尔和柯亨的工作，只是证明了任何人都不可能在 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间构造一个基数，也不可能证明没有这样的基数。此外，不仅对于 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 存在这样的问题，而且对于任何无限基数 n 和 2^n 来说，也存在这样的问题。

从逻辑上说，我们每一个人都可以根据自己的愿望，承认或者否定连续性假设。但是大多数数学家还是采取承认的态度，理由是：如果我们永远不可能作出界于 n 和 2^n 之间的基数，我们就可以不去理它；如果假定这种基数不存在并不会引起矛盾，那么为什么不可以这样假定呢？

在数学之外，也有很多不可判定的假设。例如，有的人认为，上帝是否存在，这是一个不可判定的问题，虽然他们并不能象葛德尔和柯亨那样对连续性假设的不可判定性进行证明。物理学家海森堡认为，一个电子在某一瞬刻的精确位置和速度是不可判定的。"在没有任何光线的条件下，红色的物体会变成蓝色的，"这样一个假设也是不可判定的。它既不可能证明是正确的，也不可能证明是错误的。这是由于在没有任何光线的条件下，根本无法判断一个物体的颜色。从逻辑

上说，我们既可以承认这个假设，也可以否定这个假设. 当然,对于多数人来说,他们将否定它,因为奥卡姆有句名言：符合事实的一切假设,应当选择其中最简单的.

习　题　6

1. 下列基数中哪一个最大?

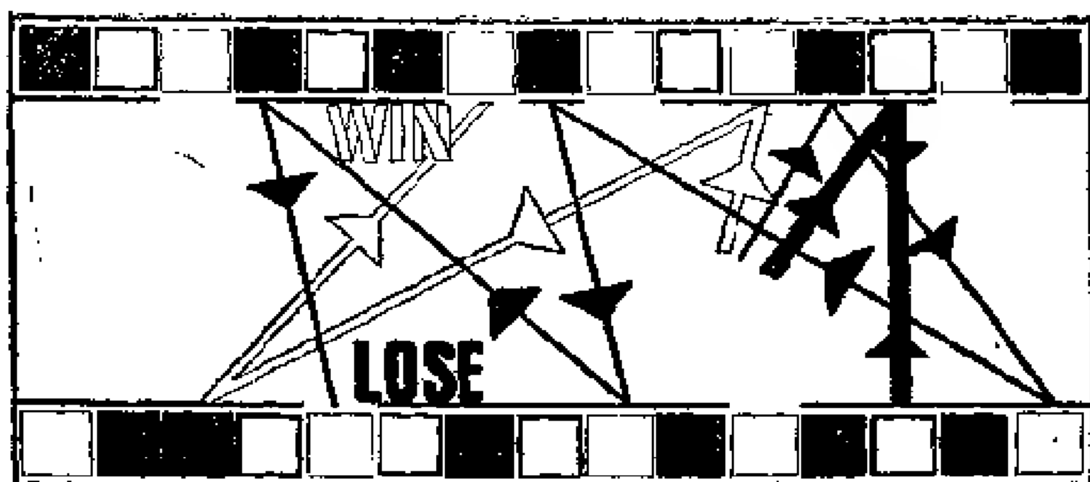
$$\aleph_4,\ 2^{(2^{\aleph_3})},\ 2^{\aleph_3},\ \aleph_0^{100}.$$

2. 设 S_1 有 $\aleph_\omega$ 个元素，S_2 有 $\aleph_{\omega 2}$ 个元素，等等. 集合 S_1，S_2 ……的并集的基数是什么?

3. 下面的论证错在哪里?
   “如果 $S \doteq$ 字母表中所有字母的集合，S 就是 S 的一个元素. 因此字母表中所有字母的集合是无意义的.”

4. 指出下面哪个是真正的集合：
   (1) 所有无限基数的集合；
   (2) 英语中能写出的所有句子的集合；
   (3) 所有元素的集合.

5. 在不用连续性假设的条件下，证明比 $\aleph_1$ 小的基数至多有 $\aleph_1$ 个.
   [提示：设集合 S 有 $\aleph_1$ 个元素. 对于每一个小于 $\aleph_1$ 的基数 n，S 中有一个子集恰好有 n 个元素.]



七、希罗德和伯恩斯坦怎样测量台球桌的大小

1. 小于或者等于

在第四章里，我们讨论了无限基数间的“大于”关系．这里我们将讨论这种关系的相反形式，而且包括相等的情况．

如果一个集合有 n 个元素，它的一个子集有 m 个元素，那么就说基数 m 小于或者等于基数 n（记作 $m \leqslant n$）．

小于或者等于关系有三条重要的性质：

(1) 每一个基数小于或者等于它本身[1]．

因为对于 n 个元素的集合 S 来说，S 就是它自己的一个

1) 这个事实说明“小于或者等于”关系的名称中为什么要有“等于”一词的理由．必须注意，我们是把“小于或者等于”作为一个整体来定义的．“小于”可以定义为：$m<n$ 就是 $m \leqslant n$ 而且 $m \neq n$．

子集，而且作为子集 S 仍有 n 个元素.

（2）如果一个基数小于或等于另一基数，后者又小于或等于第三个基数，那么第一个基数必小于或等于第三个基数.

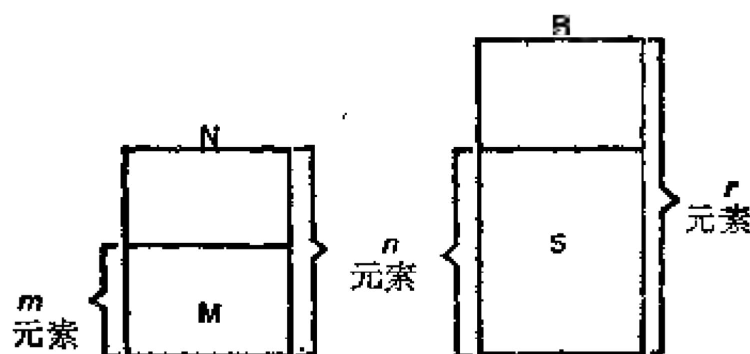


图 8

这听起来是很显然的，但是这仅仅是由于我们熟悉有限数的情况这条性质是成立的. 这里我们介绍一种对于无限数也适用的方法. 如图 8，N 和 R 分别是有 n 和 r 个元素的集合. 设 $m \leqslant n$，那么 N 有一个子集，它恰好有 m 个元素. 这个子集记作 M. 同时假设 $n \leqslant r$，也就是集合 R 有一个子集，它恰好有 n 个元素. 这个子集记作 S.

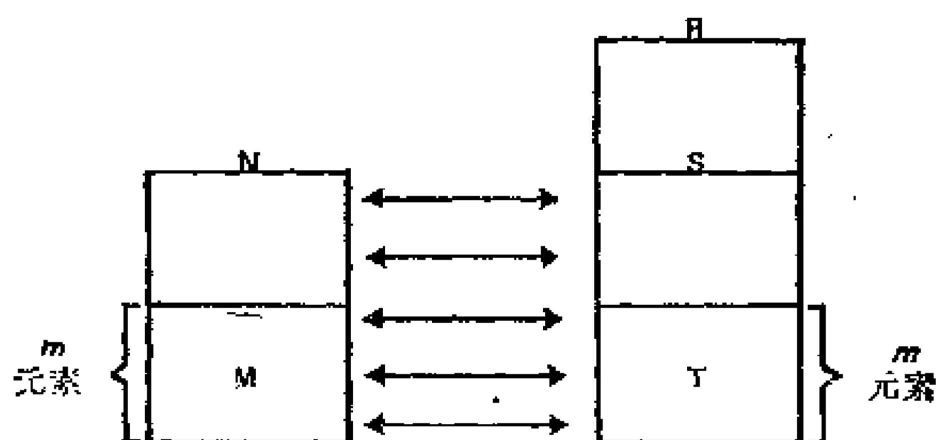


图 9

N和S有相同的基数．这就是说，它们的元素完全可以一对一地配对．如图9，S中和M的元素配对的元素，在S中构成一个子集．这个子集记作T．实际上T是R的子集．由于T和M完全可以一对一地配对，所以T的基数应当和M的基数相同．

由此可见，R也有一个子集是由m个元素组成的，这就是T．因此便可以断定$m \leqslant r$．

（3）如果两个基数中任一个都小于或等于另一个，这两个基数一定相等．

这一条性质，听起来好象很明显是成立的，根本用不着证明．但这是由于我们知道它在有限数中是成立的．要对无限数证明这一条性质仍然成立，同上面第(2)条性质一样，并不是很简单的．实际上，正是由于这种证明不是轻而易举，所以给予了一个专有的名称．上述性质(3)被称作*布罗德——伯恩斯坦*定理，因为这个性质首先是由他们两个人证明的．在这一章里我们将研究这个问题．我们的办法是先回到那个无限的王国去，看看经过臣民革命以后那里出现了什么新的情况．

2. 臣民革命以后

把阿列夫国王推翻以后，臣民们很快就把他从城堡里赶出去了．对于这些臣民来说，去看一看城堡里找到的许许多多奇珍异宝，那真是一件了不起的大事．从国王的台球室里

发现的台球桌，就是其中的一件珍品．和通常的台球桌相比，国王的台球桌要宽好几倍，而且很长很长．当人站在台球桌的一头向前看另一头时，很难说出这张台球桌的长是无限还是有限．桌子的两边有无数个球囊，有时球会落入这些球囊．有一些弹球棒斜靠在一面墙上，另外还有一个长把的蝴蝶形网．另一面墙边放着一个老式的小橱，上面写着：

台 球 规 则

(1) 每人取用一根弹球棒，一个球，随便站在桌子的任一方．

(2) 每人轮流在桌上放置一球，并瞄准桌的对边击球．

(3) 球碰到桌的两边即被弹回，从一边弹回到另一边．如果球偶然堕入某一边上的球囊，那么不管是谁击球，这一边的人算失一分．

(4) 如果球不停地来回从一边弹回另一边，总不堕入球囊，这时裁判就可用蝴蝶形网取回球，任一方都不算失分．

(5) 当一方失去21分时，游戏即告结束．……

规则接下去讲的是记分的方法，但是这和我们确实没有什么关系．

3. 一张最奇特的台球桌

你一定会想到，臣民们决不会满足刚才谈到的那几条台

球规则．他们希望自己尝试一下．当他们这样做的时候才发现，这真是一张很希奇古怪的台球桌．球一碰到桌子边，就被弹回来，但是往哪里走，却连想也想不到：它根本不遵守反射定律．有时，球沿着一边的垂直方向前进，可是碰到桌边以后，并不象平常想的那样，沿着原来的垂直方向返回，而是向左或向右乱跑．把球猛一击，它并不一定只偏转一个小的角度，却可能沿着垂直方向弹出去，也可能又弹回来(图 10)．

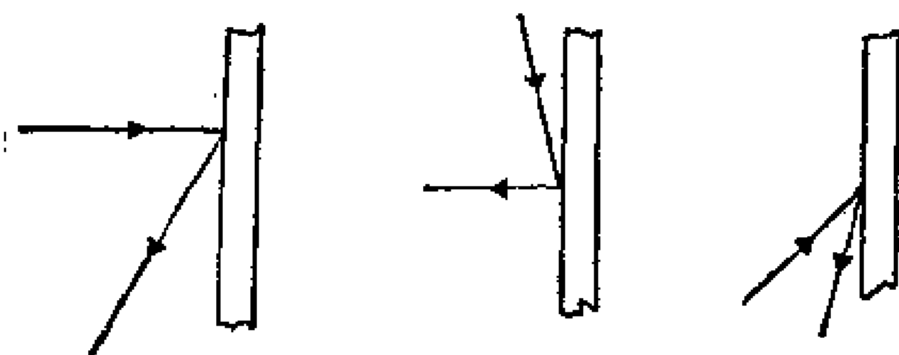


图 10 球碰到台球桌边反弹的几种情况

此外，臣民们还发现，球的运动总不减速，不象平常那样会变得愈来愈慢．球一碰到桌子边，好象又获得了新的能量．除非球掉到一个球囊里，才会静止不动．有时球走的路线决不会使球掉到任何一个球囊里．这时候就可以用上面讲到的那种有长把的蝶形网(不妨叫做取球网)．但是要会使这个网，还得掌握相当高超的技巧才能套住运动着的球，因为球的反弹根本没有什么规律可言．

臣民们商量以后决定举行一次台球竞赛，把这无限的王国分成两个区对抗．他们还商定，每方出一个裁判，由两人公正地进行裁判．东西大道东段组成的球队选举希罗德，因为

他眼尖；西段选举伯恩斯坦，因为他最擅长于用长柄网去套回飞速滚动的球.

4. 台球比赛怎样才能赢得胜利

当第一场比赛正在进行的过程当中，有几个臣民从小橱里找到一本挺小的书，封面上写着：《王室台球取胜秘诀》. 这本书里讲述了这张台球桌的主要的不同于一般台球桌的特性，因此他们便决定竞赛延期举行，以便让希罗德把这本书念给大家听听.

台球桌的下列特性应当予以注意：

(1) 球碰到桌边以后，弹回的方向不象平常的台球桌那样，决定于球滚动的路线和桌边所成的角度，而取决于球击中桌边的哪一点. 对于同一点来说，从不同方向来的球，弹出去以后都是同一个方向. 然而当球击中某一点附近的点，反弹出去的方向可能完全不同. 下面的两个图表示的就是这一条特性.

于是，臣民们一个接一个地传看书上的插图. 为了让读者也看得到，我们把图复制在这里（图 11）.

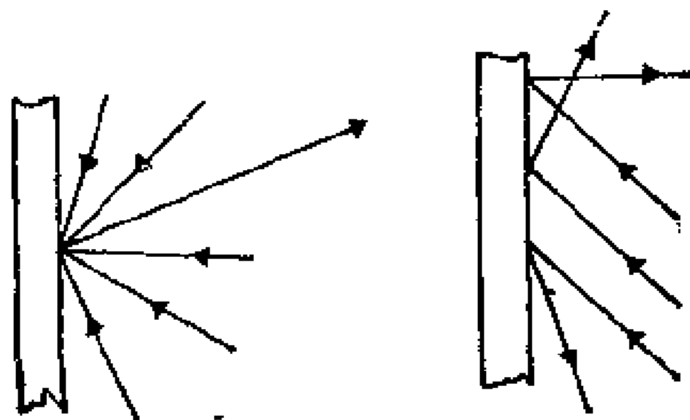


图 11

当每一个人看过这张图以后，书传到了伯恩斯坦手里，他接着把希罗德还没有念的那些继续念下去。

（2）球碰到桌边弹出去以后，不是掉到对边的一个球囊里，就是碰到对边又被弹出去。球永远也不会滚向桌子的一端。

（3）桌的一边有且仅有一个点，从这点反弹出去的球，可以击中对边上任一已知点。要想击中球囊，也有同样的一条秘诀：桌边正好有一点，从这点反弹出去的球，可以直接击中对边上任一指定的球囊。

（4）桌子的每一边上都有三种点，即得分点、失分点和既不得分也不失分的零分点。根据球击中一个点以后所出现的结果，来区分这个点应该属于哪一种。

如果一个队员将球击中得分点，那就是说，球一定会掉到对方的球囊里，因此对方就失一分。

如果这个队员击中失分点，球就会滚回来而掉进自己一方的球囊里，因此这个队员就失一分。应当指出，球囊当然要看作是得分点。

球击中零分点，它反弹出去以后又会击中零分点，而且永远不会掉进球囊里去。这时裁判就得利用取球网让球停止滚动。

关于台球竞赛的这些可以作为竞赛的最优战术的新知识，在臣民中引起了许多讨论。希罗德和伯恩斯坦轮流继续把那本书念完给大家听。书的其余部分还讲到如何选最好的点去瞄准等等相当高超的技术。书中指出，不能把球囊看作是瞄准的最好的点，因为球囊周围可能有许多失分点，因此除非瞄准十分准确，否则直接瞄准球囊很近于冒险。最好的战术，应当找出桌子的对边上哪一部分得分点特别多，然后瞄准这一部分的中点。

5. 希罗德和伯恩斯坦解决的一个问题

臣民们又玩了许多天，有些人玩台球的技巧已经掌握相当熟练．于是争论就发生了．争论的问题是桌子的一边是不是比另一边长．从当时的情况看，这个问题并不是挺容易解决的，因此他们便去请教两位裁判希罗德和伯恩斯坦，要他们帮助弄清楚这个问题．

你也许已经想过，解决这个问题应当挺容易：只要拿一根尺子去量量两边的长就行了吧！但是那个国家的臣民当时还没有尺子，因为他们根本没有长度的概念，还没有想到需要尺子．一个东西的大小，他们理解为点的多少．因此，上面提出的问题就是：桌子哪一边的点多一些？

希罗德和伯恩斯坦为了研究这个问题，花了整整三天时间．他们仔细研究了那本《王室台球取胜要秘》，作了大量计算，写满了许许多多张纸．希罗德常常兴高采烈地写了几分钟，然后把他写的给伯恩斯坦看．但是伯恩斯坦看后直摇头，把那张纸也丢在桌上了．于是伯恩斯坦又开始计算．这样过了好几天，台球桌上到处扔满了计算用的废纸．最有趣的是，在这几天里，不管希罗德还是伯恩斯坦，居然都没有去仔细看看那个台球桌．他们满有把握地相信，只要根据那本书上讲的内容，用纯逻辑的方法就一定能解决问题．结果表明，他们的办法确实不错．

希罗德几乎是连续工作个不停，直到第三天的深夜，他突

然站起来，要台球室里的人都保持安静，马上就要宣布研究的结果了．于是伯恩斯坦说话了．

“无限王国的公民们，我的同事和我，为了研究这个问题已经工作了好几天了．现在我们一致认为，台球桌的两边是一样长．”

“另外，”希罗德插进来说，“我们发现了一种非常巧妙的证明这个问题的方法．要做好几步才能获得结论，所以伯恩斯坦和我将轮流说明怎样构造这个证明．”

“首先，”伯恩斯坦开始说道，“我们看到，桌子左边的点，……”

“包括球囊…，”希罗德补充说．

“是的，包括球囊，”伯恩斯坦继续说道．“左边的点，包括球囊在内，同右边的点，但不包括球囊，应当一样多．”

“对于左边的每一点来说…，”希罗德解释说．

“包括球囊…，”

“包括球囊，都有右边的唯一的一个点，球从这点反弹回去以后正好到达左边那点上去．这样，左边所有的点都可以同右边的点（除去球囊以外）一对一地配成对．”

“另一方面，右边的点，包括球囊在内，同左边的点，但不包括球囊，也是一样多．”

“证明的方法和前面一样，”希罗德补充说．

“是的，用完全相同的方法就可以证明，”伯恩斯坦同意地说．

“现在我们要注意，球击中一个得分点，它必须是从另一

边上的失分点反弹回去的. 因此，我的得分点就是你的失分点."

"反过来讲也对，"伯恩斯坦继续说，"如果你把球击向失分点，球就会反弹到桌子另一边的得分点."

"因此，"希罗德作结论似地说，"我这一边的得分点，同你那边的失分点，恰好一样多."

"而且你那边的失分点，同我这边的得分点，也恰好一样多."

"所以总起来说，"希罗德继续说，"我们每一边的得分点和失分点的总数是相同的."

"但是我可以比你多有几个得分点."伯恩斯坦说.

"这样一来，我一定比你多有几个失分点."希罗德说.

"是这样. 但是我们各自的总数还是相同."

"把得分点和失分点加起来，总数是相同的. 留下的问题是要考虑既不得分又不失分的零分点."

"这个问题好解决，"伯恩斯坦接着说，"因为击中桌子一边零分点的球，弹回来以后碰到另一边上的点还是零分点. 这样一来，桌子两边的零分点就可以一对一地配成对啦!"

"这就是说，每一边上的零分点的数目也相同."

"正是这样. 我们的得分点和失分点总数相同. 零分点的数目也相同. 而桌子每一边上就只有这样三种点，……"

"还有球囊呢?"希罗德问道.

"你可能已经忘记了，球囊应当包括在得分点里面."

"完全正确."希罗德表示同意.

"所以总起来说，我们可以得出结论：桌子一边上的点……"

"同另一边上的点，数目相同。"

6. 一种王室台球桌

在这一节里，我们将介绍一种王室台球桌，以便让读者有机会显显身手．下面一边上的点分别编号为1，5，7，8，9，……，也就是除了2，3，4和6以外的所有有限数．上面一边的点分别编号为1，5，7，9，11，13，15，16，17…，也就是除了2，3，4，6，8，10，12和14以外的所有有限数．下面一边上球囊的编号等于2加上3的倍数，即5，8，11，14，…上面一边上球囊的编号是18，22，26…，即等于2加上4的倍数．在这种奇特的王室台球桌上，球反弹的路线将遵循下述规定．当球击中下边一点n时，如果n是3的倍数，球就反弹到另一边上编号为$2n/3+10$的点；如果n等于1加上3的倍数，球就反弹到另一边上编号为$2(n-1)/3+1$的点．（编号等于2加上3的倍数的点是球囊，球就会落入球囊而不会回弹．）例如，一个球击中桌子下边编号为12的点，反弹回去便击中上边的点是$(2/3\times12)+10$，即编号为18的点．如果球击中点13，反弹回去便会击中$[2/3\times(13-1)]+1$点，即上边的点9．

当球击中上边的点n时，如果n是奇数，反弹回去便会击中下边的点n；如果n是4的倍数，便会击中$n/2$（编号是偶

数但又不是 4 的倍数的，一定是球囊。)图 12 上画出了几种可能的球路。

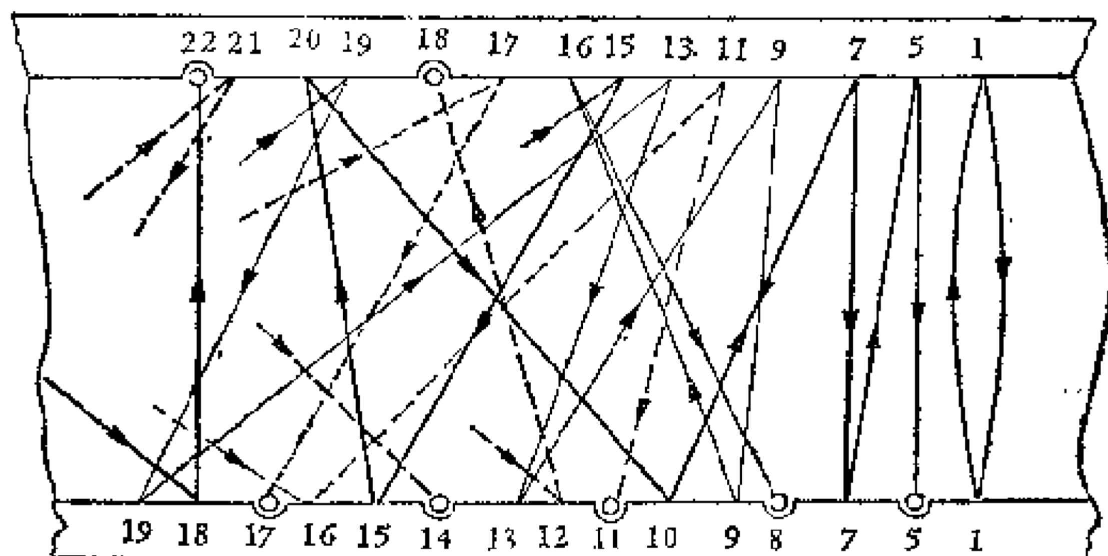


图 12

上边的点 19 是失分点，因为从下面击球到上边的点 19 时，来回反弹几次以后终于落入击球人一边的球囊 8 里，这样他就该失一分。上边的点 24 是得分点。两边上的点 1 都是零分点。

7. 希罗德-伯恩斯坦定理

假设我们有两个集合 S 和 T。还假设 S 有一个子集 S_1，它和 T 有同样多个元素；T 有一个子集 T_1，它和 S 有同样多个元素。

我们可以把 S 和 T 看作是一种王家台球桌的两边。下面

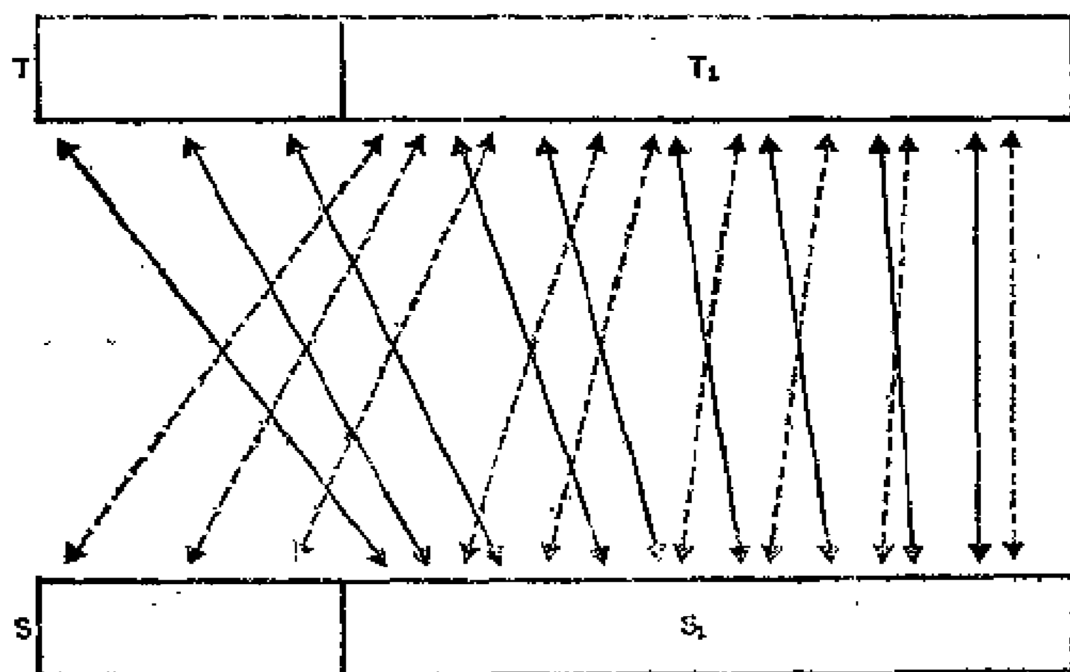


图 13

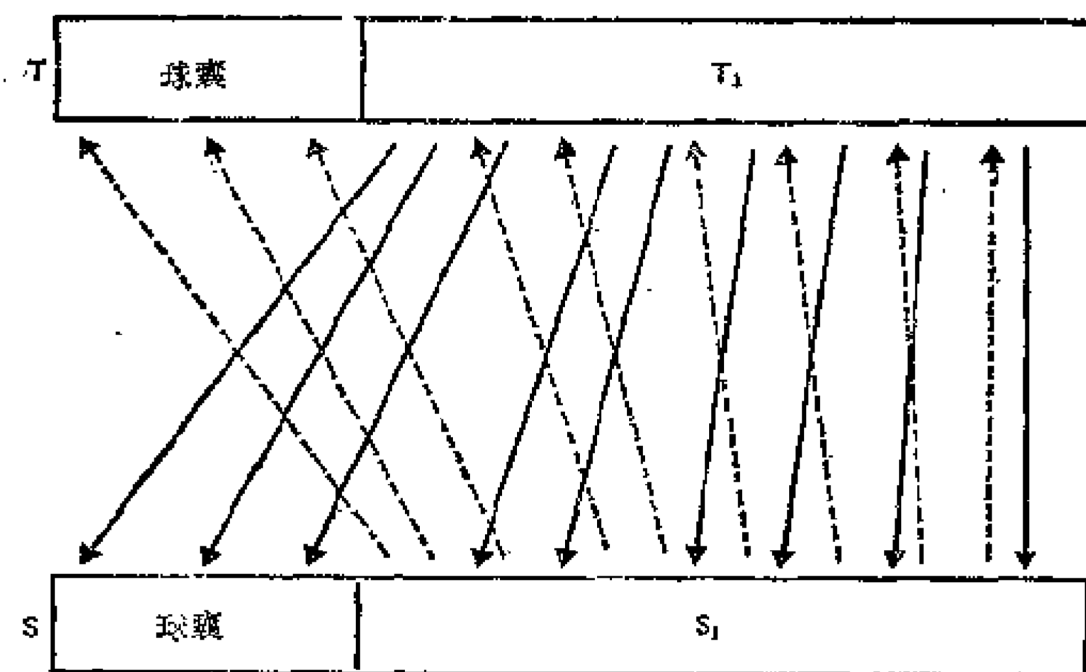


图 14

一边上的球囊是 S_1 外面的那些点，上面一边的球囊是 T_1 外面的那些点．T_1 中任意一点 n 都有 S 的一点 n^* 与之配对(因为 T_1 和 S 的基数相同)．我们规定，球击中 T_1 的点 n，反弹回

去碰到 S 的点 n^*，那么 n 和 n^* 就配成一对. 对于下面一边，我们可以做同样的规定. 这样我们就可以按照上述规定确定球来回滚动的路线，同样也就可以玩这种台球了. 希罗德和伯恩斯坦的论证表明，桌子两边点的数目应当相同. 于是，我们可以得出结论：如果两个基数，其中任一个都小于或等于另一个，那么这两个基数相等.

习　题　7

1. 第 62 页图 12 中，哪些点是得分点？哪些点是失分点？哪些点是零分点？
2. 第 61 页讲的王室台球桌，下面一边有多少得分点，有多少失分点，多少零分点？
   [提示：证明下边上 6 的倍数(从 12 以后)都是失分点，编号可以写成 $9k+7$ 的点都是得分点.]
3. 图 15 表示的是另一种王室台球桌.

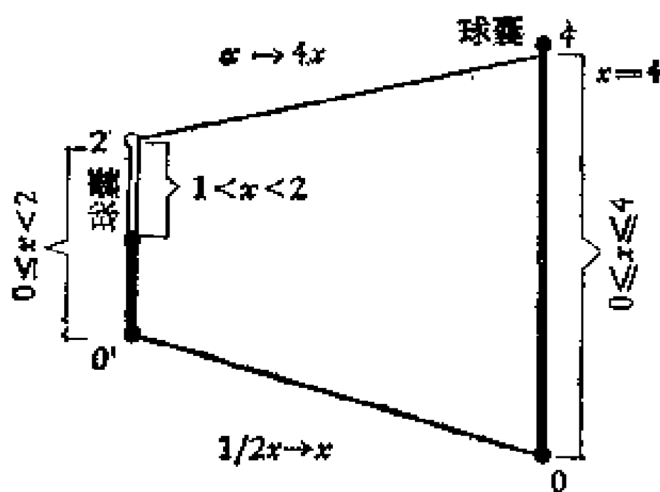


图　15

左边包括 $0\le x<2$ 中所有实数 x. 大于 1 的点都是球囊. 右边包括 $0\le x\le 4$ 中所有实数 x，而只有一个球囊，即 $x=4$.

当球击中左边 x 点时，如果 $1<x<2$，球就直接掉进球囊；如果

$0\leqslant x\leqslant 1$，球就会被反弹回到 $4x$. 当球击中右边的点 $x=4$ 时，就会直接掉进球囊；当球击中点 $x<4$ 时，就会反弹回到右边的点 $x/2$.

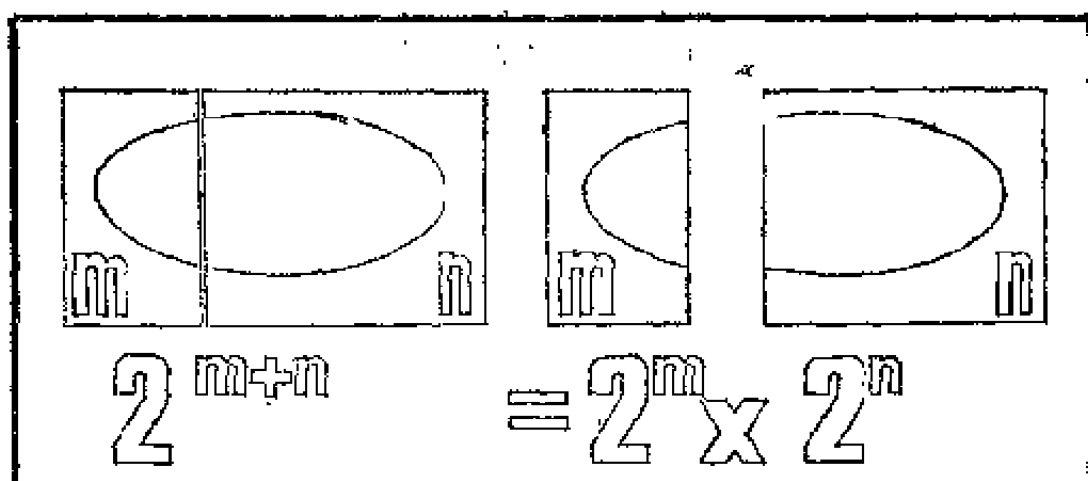
a. 左边的点 $x=\frac{1}{4}$是三种点中的哪一种？

b. 右边的点 $x=\frac{1}{4}$ 是哪一种点？

c. 左边的点 $x=\frac{1}{3}$ 是哪一种点？

d. 两边有没有零分点？

e. 说明桌子两边哪些点是得分点？ 哪些点是失分点？ 哪些点是零分点？



八、无限的算术

这一章将讨论基数的算术．首先我们来证明关于基数加法和乘法的两条重要法则．

1. $m+n\leqslant mn$

对于基数 m 和 n 来说，只要它们都大于 1，上面的关系式就成立．我们利用图 16 来证明这个式子．

设不相交的集合 M 和 N 的基数分别是 m 和 n． 由 M 中的 x 和 N 中的 y 组成数对 (x, y)，所有这种数对的集合记作 S．S 的基数是 mn．数对 (b, y) 中，前一个数 b 固定不变，而第二个数可以取遍 N 中所有元素；这种数对的数目等于 N 的基数，也就是等于 n． 数对 (x, c) 中，第二数固定为 c，而第一个数可以取遍 M 中所有元素，这种数对的数目等于 m．上面提到的两种数对总共有多少对呢？ $m+n$ 吗？ 不完全

对，因为其中有一数对计算了两次，这就是数对 (b, c). 为了凑够 $m+n$ 对，我们可以添上一个数对，其中不包含 b 或者 c. 由于M和N除了 b 和 c 以外，都至少还有一个元素，所以上面要添的数对确实是存在的. 这样一来，我们就从 mn 个数对中找出了 $m+n$ 对，也就是说，基数为 mn 的集合 S 有一个子集，它有 $m+n$ 个元素. 由此可见，$m+n \leqslant mn$.

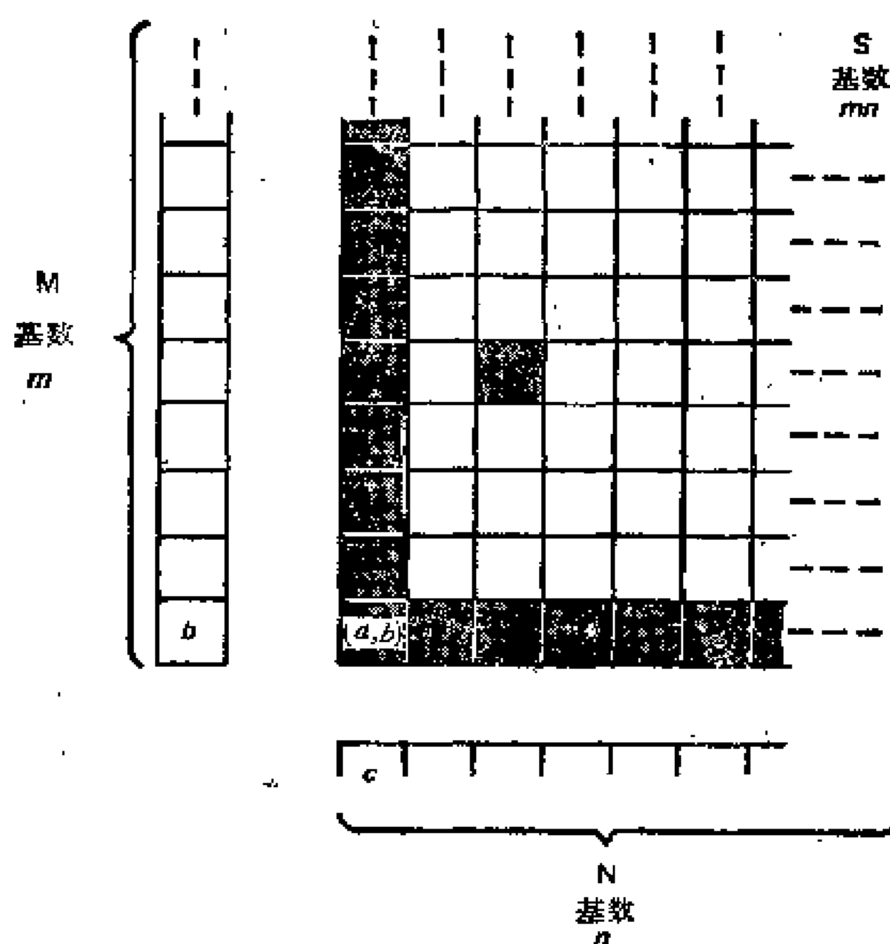


图 16

2. $2^{m+n}=2^m\cdot 2^n$

这个关系式对于任何基数 m 和 n 都是成立的，它把加法和乘法联系起来．和前面一样，设 M 和 N 是两个不相交的集合，它们的基数分别是 m 和 n．但是这里用 S 表示上述两个集合的并集．S 有 $m+n$ 个元素，它的子集共有 2^{m+n} 个．

这样一来，S 的每一子集可以分成两部分：一部分在 M 中，一部分在 N 中．于是 S 的每一个子集都可以看作是由一对子集，即 M 的一个子集和 N 的一个子集组成的．反过来，M 的任一个子集和 N 的任一个子集，都可以合在一起组成 S 的一个子集．由此可见，我们可以把 S 的子集（总共有 2^{m+n} 个）同 M 的子集（总共有 2^m 个）和 N 的子集（总共有 2^n 个）组成的子集对，一对一地配对．而由 M 的子集和 N 的子集搭配成的子集对共有 $2^m\cdot 2^n$ 对，因此 $2^{m+n}=2^m\cdot 2^n$．

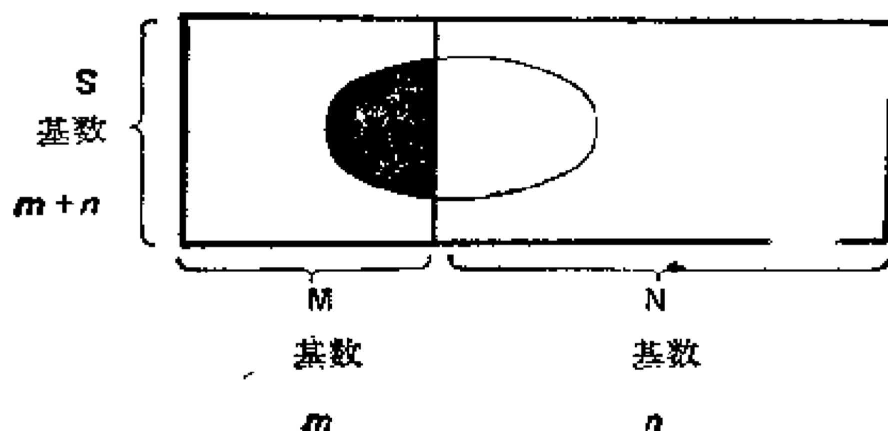
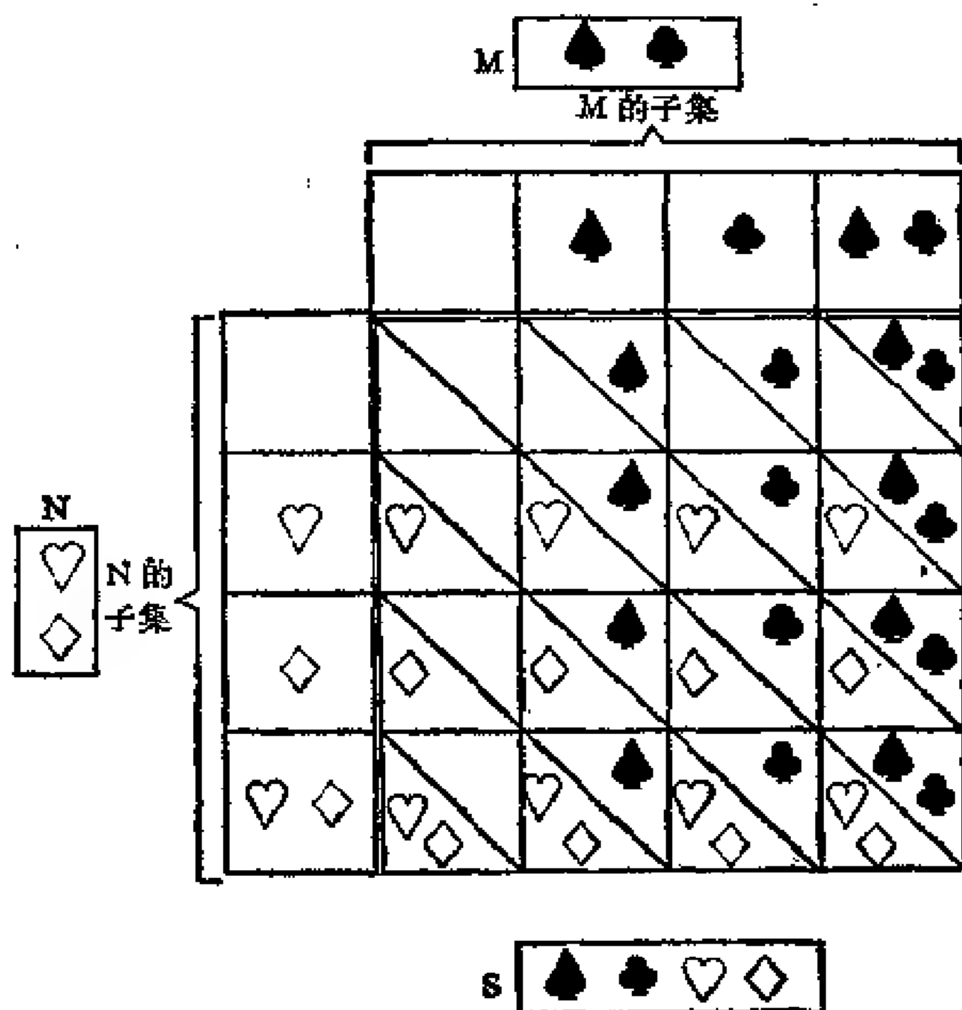


图 17

图 18 就 $m=2$ 和 $n=2$ 这种特殊情况直观地表示了

上述证明的正确性．从图中可以看出，$2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2}$，亦即 $4 \times 4 = 16$．当然，证明这一点还有更简便的办法．但重要的是，这些简便办法都不适用于无限数，而我们这种办法却能够推广到无限数．



这张表说明怎样把 S 的子集看作是 M 的子集和 N 的子集搭配成的子集对

图 18

3．基数的加法和乘法

利用上面的两条法则以及非常有用的希罗德—伯恩斯坦

定理，我们可以求出基数的和与积。

例 1. $\aleph_1 \times \aleph_1$ 等于什么？

解. $\aleph_1 \times \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

（在第二章中已经证明 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.）

例 2. $\aleph_1 + \aleph_1$ 等于什么？

解. 一方面，$\aleph_1 \leqslant \aleph_1 + \aleph_1$.

另一方面，$\aleph_1 + \aleph_1 \leqslant \aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1$（见例 1）.

根据希罗德-伯恩斯坦定理，由于 $\aleph_1$ 和 $\aleph_1 + \aleph_1$ 中每一个都小于或等于另一个，它们应当相等.

例 3. $\aleph_0 + \aleph_1$ 等于什么？

解. 一方面，$\aleph_1 \leqslant \aleph_0 + \aleph_1$.

另一方面，$\aleph_0 + \aleph_1 \leqslant \aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1$（见例 2）.

根据希罗德-伯恩斯坦定理，$\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$.

例 4. $\aleph_1 \times \aleph_2$ 等于什么？

解. $\aleph_1 \times \aleph_2 = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0+\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

例 5. $\aleph_1 + \aleph_2$ 等于什么？

解. $\aleph_1 + \aleph_2 \leqslant \aleph_1 \times \aleph_2 = \aleph_1$.

另一方面，显然有 $\aleph_2 \leqslant \aleph_1 + \aleph_2$.

因此，$\aleph_1 + \aleph_2 = \aleph_2$.

无限基数的加法和乘法并不重要，因为任何两个无限基数的和或积，总等于其中较大的一个. 由于这个缘故，当利用小的基数构造大的基数时，加法和乘法是没有什么用处的运算. 构造大基数的强有力的运算是取幂运算，即乘方. 在前面第四章里，我们已经讨论了 2 取任意基数次幂的运算. 现

在我们将进一步加以推广，并且对任意基数 m 和 n 定义 m^n。为此，我们必须首先定义映射。

4. 映 射

两个集合之间，如果根据某一法则，其中一个集合的任一元素都有另一集合某一确定的元素与之对应，这个法则就叫做映射。如果元素 y 是 x 对应的元素，我们便记作"$x \to y$"。一张地图可以看作是地球表面上的点的集合到一张纸上的点的集合的一种映射。法则 $x \to x^2$ 给出从整数集（包括正整数、负整数和零）到整数集的一种映射。根据这个法则，每一个整数都和它的平方数对应。

在定义一种映射时，它的法则也可能很离奇古怪。例如，从所有有限数的集合到集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 的映射，可以规定如下：有限数 n 和 π 的小数部分的第 n 位数字对应。因为 $\pi = 3.1415\cdots\cdots$ 在这种映射下，$1 \to 1$，$2 \to 4$，$3 \to 1$，$4 \to 5$，…

5. 一一映射和全映射

从 S 到 T 的映射，根据规定，S 的每一个元素只有 T 的一个元素与之对应。在这种规定下，T 的某一个元素可以同 S 中多个元素对应。例如，整数集上的映射 $x \to x^2$，同一元素 4 与 2 和 -2 两个元素对应。这方面极端的例子是一个集合

中的每一个元素都映射为另一个集合的同一个元素．另一个极端是所谓一到一的映射(简称一一映射)．在S到T的映射下，如果T的每一个元素至多只和S的一个元素对应，这种映射就是一一的．在整数集里，映射 $x \to x^2$ 不是一一的，但是映射 $x \to 2x$ 是一一的．

从S到T的映射下，对于S的每一个元素，都有T的一个元素与它对应．但是并不是T的每一个元素都必须同S的元素对应．也就是说，T的一些元素可能“没有用”．例如，整数集到整数集的映射 $x \to 2x$，后一个整数集只用了偶数．没有任何整数映射到7，因为不可能有整数x使得 $2x = 7$．任何元素都被用上的映射，叫做全映射．如果T的每一个元素都至少同S的一个元素对应，那么这种映射就是全映射．从整数集到整数集的映射 $x \to 2x$ 不是全映射，而映射 $x \to x+1$ 是全映射，图 19 直观地说明了这些概念．

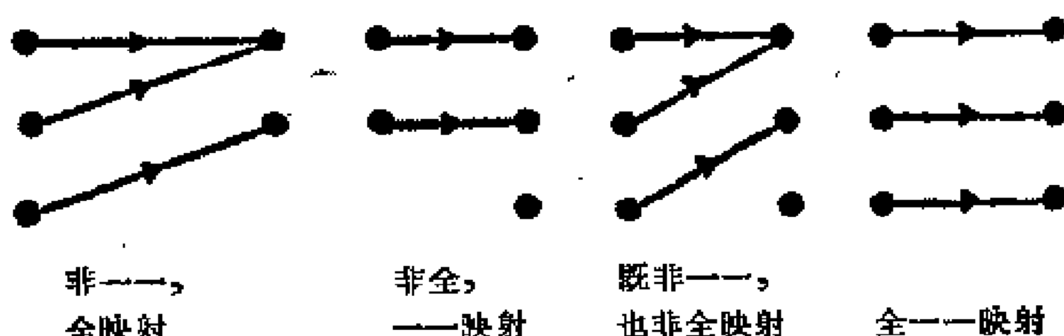


图　19

如果从S到T的一个映射既是一一映射，又是全映射，那么T的每一个元素恰好有S的一个元素与之对应(因为是全映射，所以至少有一个元素，由于是一一的，所以至多只有一个)．在这种映射下，S的所有元素和T的所有元素一对一地

配对.

因此，两个集合有相同的基数，当且仅当从其中一个集合到另一个集合有一个映射，它既是一一映射，又是全映射.

6. 怎样定义 m^n

从集合 $\{1, 2, 3\}$ 到集合 $\{A, B\}$ 的映射，可以列表如下：

$[1\to A \quad 2\to A \quad 3\to A]$

$[1\to A \quad 2\to A \quad 3\to B]$

$[1\to A \quad 2\to B \quad 3\to A]$

$[1\to A \quad 2\to B \quad 3\to B]$

$[1\to B \quad 2\to A \quad 3\to A]$

$[1\to B \quad 2\to A \quad 3\to B]$

$[1\to B \quad 2\to B \quad 3\to A]$

$[1\to B \quad 2\to B \quad 3\to B]$

从3个元素的集合到2个元素的集合，共有 $8=2^3$ 种映射. 另一方面，相反方向的映射却有 $9=3^2$ 种.

$[A\to 1 \quad B\to 1]$

$[A\to 1 \quad B\to 2]$

$[A\to 1 \quad B\to 3]$

$[A\to 2 \quad B\to 1]$

$[A\to 2 \quad B\to 2]$

$$[A \to 2 \quad B \to 3]$$
$$[A \to 3 \quad B \to 1]$$
$$[A \to 3 \quad B \to 2]$$
$$[A \to 3 \quad B \to 3]$$

从一个有限集到另一个有限集的映射，计算其总数的法则是不难找到的. 从 n 个元素的集合到 m 个元素的集合，共有 m^n 个映射. 现在我们可以把这个法则推广到无限基数的情况.

如果 m 和 n 是两个基数，那么从基数为 n 的集合到基数为 m 的集合的全体映射组成一个集合，这个集合的基数就定义为 m^n.

前面我们对任一基数 n 曾经定义 2^n 是任一有 n 个元素的集合的子集所构成的集合的基数. 我们必须验证这个定义同上面进一步推广的定义是一致的. 我们必须使自己确信，从集合 S 到集合{1, 2}的映射的个数，同 S 的子集的个数，应当正好一样. 事实确是如此，因为对应于从 S 到{1, 2}的每一个映射，都有 S 的一个子集，它的元素就是 S 中映射到 1 的所有元素. 同时，对应于 S 的每一个子集，都有一个映射，在这个映射下子集的元素都映射到 1，而其余的元素都映射到 2. 这里两个方面的对应关系相当于把映射和子集配对，因此它们的基数相同.

例如，从{1, 2, 3}到{1, 2}的八个映射，以及与之对应的子集，列表如下：

$1\to1 \quad 2\to1 \quad 3\to1 \quad \{1, 2, 3\}$

$1\to1$　$2\to1$　$3\to2$　$\{1, 2\}$

$1\to1$　$2\to2$　$3\to1$　$\{1, 3\}$

$1\to1$　$2\to2$　$3\to2$　$\{1\}$

$1\to2$　$2\to1$　$3\to1$　$\{2, 3\}$

$1\to2$　$2\to1$　$3\to2$　$\{2\}$

$1\to2$　$2\to2$　$3\to1$　$\{3\}$

$1\to2$　$2\to2$　$3\to2$　$\{\ \}$空集

7. $m^n \leqslant 2^{mn}$

另一种观点是把映射看作是数对的集合．这时不用 $1\to1$，$2\to2$，$3\to1$ 这种写法，而代之以(1，1)，(2，2)，(3，1)这种写法．这三个数对，是第一个元素属于集合{1，2，3}、第二个元素属于{1，2}的所有数对的集合的子集．

虽然每一个映射可以看作是一个数对的集合，然而并不是每一个数对的集合都能看作是一个映射．例如，数对(1，2)，(2，1)，(2，2)，(3，2)的集合就不能看作是一个映射，因为否则就必须有 $1\to2$，$2\to1$ $2\to2$，$3\to2$．这是不可能的，因为在一个映射下，一个元素只能映射到一个元素．也允许几个不同的元素映射到某一个元素．因此 $1\to2$ 和 $3\to2$ 并没有什么错误，错就错在 2 不能映射到两个不同的元素．另一种数对的集合，例如(1，2)，(3，1)这个集合也不能看作是从{1，2，3}作的映射，因为这里只规定了 1 映射到 2，3 映射到 1，但是没有规定 2 应当映射到哪个元素．

由于从集合M到集合N的每一个映射，都可以看作是M和N的元素组成的数对(数对的第一个元素属于M，第二个属于N)的集合的子集，所以从M到N的映射的数目，应当小于或等于数对集合的子集的数目．用符号来表示就是：如果N的基数是n，M的基数是m，从N到M的映射有m^n个，从M和N可以构成mn个数对，这些数对可以构成2^{mn}个集合．因此，$m^n \leqslant 2^{mn}$.

例 6. 求 $\aleph_0^{\aleph_0}$.

解. 根据上面的不等式，$\aleph_0^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0^2}$.

而 $\aleph_0^2 = \aleph_0$，因此有 $\aleph_0^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

另一方面，$2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0}$.

利用希罗德一伯恩斯坦定理，我们就会得出

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

例 7. 求 $\aleph_1^{\aleph_2}$.

解. $\aleph_1^{\aleph_2} \leqslant 2^{\aleph_1\aleph_2} = 2^{\aleph_2} = \aleph_3$.

另一方面，$\aleph_3 = 2^{\aleph_2} \leqslant \aleph_1^{\aleph_2}$.

因此，$\aleph_1^{\aleph_2} = \aleph_3$.

例 8. $\aleph_2^{\aleph_1}$ 等于什么？

解. $\aleph_2^{\aleph_1} \leqslant 2^{\aleph_2\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = \aleph_3$.

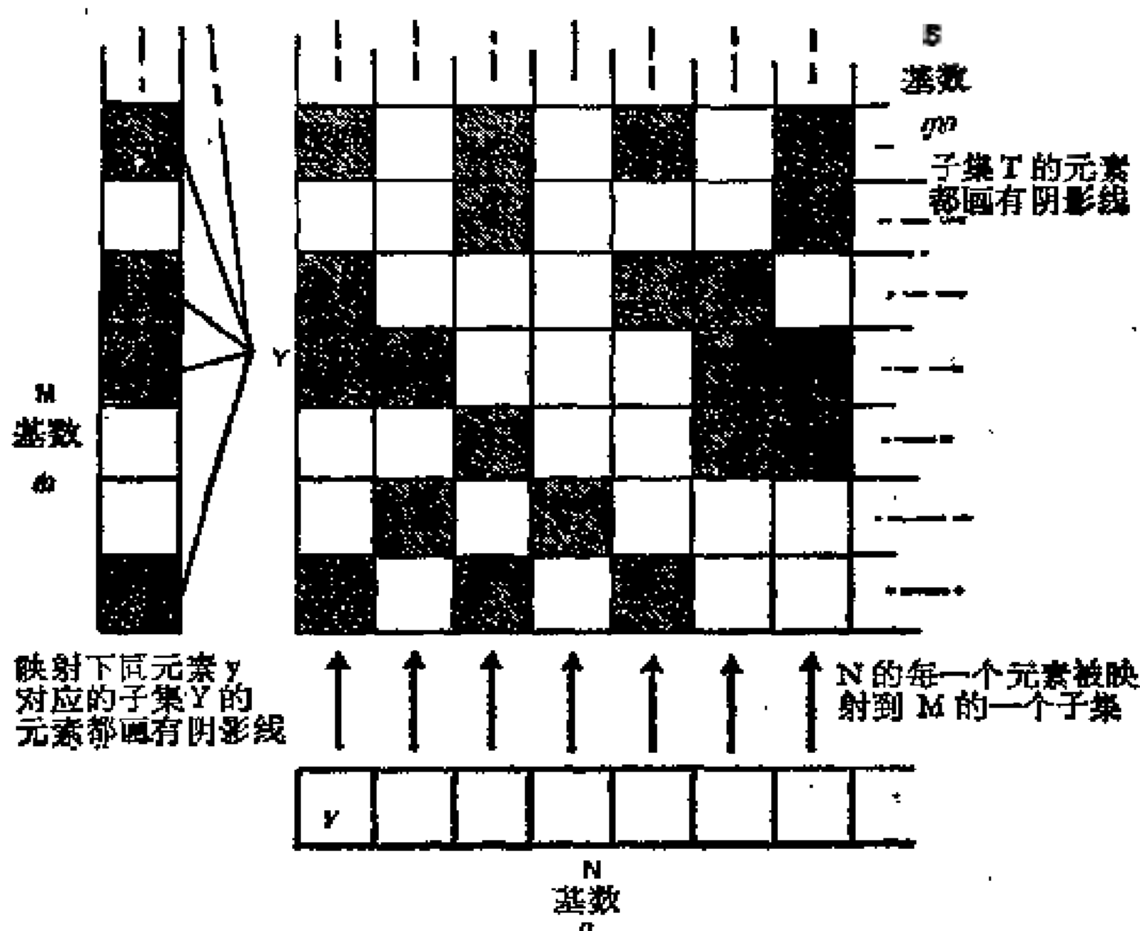
另一方面，$\aleph_2 = 2^{\aleph_1} \leqslant \aleph_2^{\aleph_1}$.

这里我们不能准确地说出 $\aleph_2^{\aleph_1}$ 等于什么．这种办法只能使我们得出这样的结论，即 $\aleph_2^{\aleph_1}$ 在 $\aleph_2$ 和 $\aleph_3$ 之间(包括等于 $\aleph_2$ 或 $\aleph_3$ 的情况)．显然，我们还必须去探索更为有力的技巧.

8. $(2^m)^n = 2^{mn}$

对于m和n都是有限数的情况，这个等式我们已经很熟悉．事实上，这个等式对于所有基数m和n都成立，下面就来给出证明．

设集合M和N的基数分别是m和n．我们用符号S表示所有数对(x, y)的集合，其中x属于M，y属于N．我们知道，S有mn个元素．假设S有一个子集T，即T是某些数对



数对(x, y)（其中x属于M，y属于N）可以看作是从N到M的子集的集合的映射

图 20

(x, y) 的集合. 我们可以把子集 T 看作是从N到M的子集的集合按下述方法所作的映射. 对于N中的元素 y，我们指定它映射到M的一个子集，这个子集的元素包括T中所有数对 (x, y) 里出现的全体 x。

反过来，从N到M的子集的集合的每一个映射，都可以看作是S的一个子集. 因为假设这个映射对于N的元素 y，都规定了M的一个子集 Y。我们可以把这个映射看作是和所有数对 (x, y)——其中 x 是M的元素，y 是N的元素，而且 x 属于 Y——的集合等价的。

由于S有 mn 个元素，因此S有 2^{mn} 个子集. M的子集的集合的基数是 2^m，因此从N到M的子集的集合的映射有 $(2^m)^n$ 个. 我们已经证明S的子集可以同这些映射一对一地配对，这就证明了 $(2^m)^n = 2^{mn}$.

上面的推理有些难懂. 为了讲得更清楚一点，我们用一个特例来作仔细的考察，我们要证明的是，$(2^2)^2 = 2^{2\cdot 2} = 2^4$。取集合$\{1, 2\}$和$\{a, b\}$分别是$M$和$N$. 下表中列出了从$\{a, b\}$到$\{1, 2\}$的子集的$(2^2)^2$个映射，以及相应的数对 (x, y) 的集合. 这样的数对集合共有 $2^{2\cdot 2}$ 个，它们可以和有 $(2^2)^2$ 个元素的集合一对一地配对，所以 $(2^2)^2=2^{2\cdot 2}$。

$a \to \{\ \}$ $b \to \{\ \}$ $\{\ \}$

$a \to \{\ \}$ $b \to \{1\}$ $\{(1, b)\}$

$a \to \{\ \}$ $b \to \{2\}$ $\{(2, b)\}$

$a \to \{\ \}$ $b \to \{1, 2\}$ $\{(1, b), (2, b)\}$

$a \to \{1\}$ $b \to \{\ \}$ $\{(1, a)\}$

$a \to \{1\}$　　$b \to \{1\}$　　$\{(1, a), (1, b)\}$

$a \to \{1\}$　　$b \to \{2\}$　　$\{(1, a), (2, b)\}$

$a \to \{1\}$　　$b \to \{1,2\}$　　$\{(1, a),(1, b),(2, b)\}$

$a \to \{2\}$　　$b \to \{\ \}$　　$\{(2, a)\}$

$a \to \{2\}$　　$b \to \{1\}$　　$\{(2, a),(1, b)\}$

$a \to \{2\}$　　$b \to \{2\}$　　$\{(2, a),(2, b)\}$

$a \to \{2\}$　　$b \to \{1,2\}$　　$\{(2, a),(1, b),(2, b)\}$

$a \to \{1, 2\}$　　$b \to \{\ \}$　　$\{(1, a),(2, a)\}$

$a \to \{1, 2\}$　　$b \to \{1\}$　　$\{(1, a),(2, a),(1, b)\}$

$a \to \{1, 2\}$　　$b \to \{2\}$　　$\{(1, a),(2, a),(2, b)\}$

$a \to \{1, 2\}$　　$b \to \{1, 2\}$　　$\{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}$

例 8.（第二次尝试）$\aleph_2^{\aleph_1}$ 等于什么?

解. $\aleph_2^{\aleph_1} = (2^{\aleph_1})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

例 9. $\aleph_2^{\aleph_0}$ 等于什么?

解. $\aleph_2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_1})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

习　　题　　8

1. 证明 $\aleph_2 + \aleph_3 = \aleph_3$.
2. 证明 $\aleph_3 \times \aleph_4 = \aleph_4$.
3. 证明 $\aleph_4^{\aleph_4} = \aleph_5$.
4. $\aleph_4^{\aleph_7}$ 等于什么?
5. 计算 $\aleph_5^{\aleph_2} \times \aleph_9 + \aleph_2^{(\aleph_2)} + \aleph_5^{10}$.
6. $7^{\aleph_2}$ 等于什么?
7. 假定两个无限基数的积等于其中较大的一个，证明：如果 s 和 t 是两个无限基数，且 $s \leqslant t$，那么 $s^t = 2^t$.

习 题 答 案

习题 1

1. a. 所有三位数的集合是 {100, 101, 102, …, 998, 999}, 它的基数是 $999-99=900$.

   b. $\aleph_0$, 因为末位数字是 9 的数可以排列成: 9, 19, 29, 39, ……

   c. $\aleph_0$.

   d. 26.

2. 任意选定一个鸽舍，然后把它右边的每一个鸽子向右边移动一个位置,这样就会空出一个鸽舍. 由于不存在最后一个鸽舍的问题,所以不会发生鸽子无鸽舍的情况. 如果鸽舍只有有限多个，用这种办法去处理,将会发生什么情况呢?

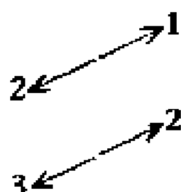
3. a. 伪语句. 有限集也可以排成一列. 但是,“任何无限集合可以排成一列时,它的基数是 $\aleph_0$”, 这是真语句.

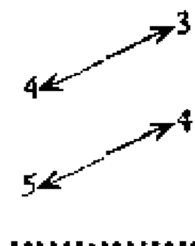
   b. 真语句.

   c. 伪语句. 例如,{2, 3, 4,…}的所有元素可以同{1, 2, 3, 4, …}除 1 以外的元素一对一地配对如下:

   1
   2←→2
   3←→3
   4←→4
   …………

   但是,这两个集合可以全部一对一地配对如下:





因此，两个集合应当有相同的基数。

d. 伪语句. 到现在为止，我们还没有证明还有另外的无限基数。而这正是下面几章中要讨论的问题。

习题 2

1. 这些基数都相等.

2.

$$1 \longleftrightarrow 1$$
$$2 \longleftrightarrow 2$$
$$\frac{1}{2} \longleftrightarrow 3$$
$$4 \longleftrightarrow 4$$
$$\frac{1}{4} \longleftrightarrow 5$$
$$8 \longleftrightarrow 6$$
$$\frac{1}{8} \longleftrightarrow 7$$
$$\cdots\cdots$$

3. a. 正确。

   b. 正确。

   c. 不正确. 例如，$1+\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0$，但是 $1\neq\aleph_0$。

   d. 当 m 是有限数时，式子不成立. 但是当 m 是无限数时，式子成立。

习题 3

1.

上图中的折线表明方阵中的点可以排成一列，因此方阵共有 $\aleph_0$ 个点.

2．对于无限基数来说，不能作除法.

习题 4

1．a．

$\{1, 2, 3, 4\}$　$\{2, 3\}$

$\{1, 2, 3\}$　$\{2, 4\}$

$\{1, 2, 4\}$　$\{3, 4\}$

$\{1, 3, 4\}$　$\{1\}$

$\{2, 3, 4\}$　$\{2\}$

$\{1, 2\}$　$\{3\}$

$\{1, 3\}$　$\{4\}$

$\{1, 4\}$　$\{\ \}$

b．$2^4 = 16$.

2．a．$\aleph_0$，因为只有一个元素的子集是：

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \cdots$$

b．$\aleph_0$，因为至多只有两个元素的子集可以排成一列如下：

$$\{\ \},\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\cdots$$

3．本题的论证只证明了有限的子集有 $\aleph_0$ 个.

4．参看第 3 题.

习题 5

1. 假设东西大道的东段上的房子都编上号码，1，2，3，…，南边的用奇数编号，北边的用偶数编号．只要宣布编号为 n 的房子的居民搬到 $2n$ 号房子就行了．就是说，每个人把它家的号码乘以 2 就行了．这样一来，所有的居民都迁到了偶数编号的房子(即东西大道路北的房子)．对东西大道西段同样办理就行了．
2. 不够．按第 1 题搬家以后，路南空出来的房子有 $\aleph_0$ 座．即使每一座房子有 $\aleph_0$ 间房子，也只有 $\aleph_0\times\aleph_0$ 即 $\aleph_0$ 间房子．然而可能组成的委员会却有 $2^{\aleph_0}$ 个，这比 $\aleph_0$ 要多得多．

习题 6

1. $2^{(2^{\aleph_3})} = 2^{\aleph_4} = \aleph_5$，

   $2^{\aleph_3} = \aleph_4$，

   $\aleph_0^{100} = \aleph_0\times\aleph_0\times\aleph_0\times\aleph_0\times\cdots\times\aleph_0 = \aleph_0$，因为 $\aleph_0\times\aleph_0 = \aleph_0$.

   因此，$2^{(2^{\aleph_3})}$ 最大．
2. $\aleph_{\omega^2}$.
3. 字母 “S” 不是字母表中所有字母的集合．它只表示那个集合．虽然我们可以写 “S = …的集合”，但实际意义是“S 表示…的集合”．因此，符号 S 不是它自己的一个元素．它是用符号 S 表示的集合的一个元素．
4. a. 无限基数有无限多个．因此，如果 S = 所有无限基数的集合，那么 S 的基数就是 S 的元素．因此，“所有无限基数的集合”这个定义就是不妥当的．

   b. 虽然“用 S 表示英语中能写出的所有句子的集合”是 S 的一个元素，但是这里并不象第 3 题解答中说的理由那样，它不会使我们陷入循环定义的情况．实际上，英语中能写出的句子只有 $\aleph_0$ 句(其他语言中也是如此)，因此这些句子可以排成一列．排列时，我们先可以按句子中有多少字母（每一句子的长应当有限)，对于同样

长的句子，我们可以按字母顺序来排．象“Am I?”这样的句子大概是排在最前面的一句．这些句子可以排列无限多，因为其中一定包括下面这样一些句子：“一加一等于二”，“一加二等于三”，“一加三等于四”，…

c．如果 $S=$ 所有元素的集合，那么 S 就是集合$\{S\}$的一个元素．因此，定义这样的集合是不妥当的．

5．假设 S 是一个集合，它的基数是 $\aleph_1$．根据定义，当 $n<\aleph_1$ 时，S 有一个子集的基数是 n．因此，S 的子集至少和小于 $\aleph_1$ 的基数一样多．于是，小于 $\aleph_1$ 的基数的集合的基数应当小于或等于 $2^{\aleph_1}=\aleph_2$（即 S 的子集的数目）．注意，如果承认连续性假设，那就会推出：小于 $\aleph_1$ 的基数恰好是 $\aleph_1$ 个，其中有 $\aleph_0$ 有限基数，有一个无限基数即 $\aleph_0$。

习题 7

1．下边　零分点：1．

　　　　得分点：5，7，8，10，11，13，14，15，16，17，19．

　　　　失分点：12，18．

　上边　零分点：1．

　　　　得分点：18，21，22．

　　　　失分点：5，7，9，11，13，15，16，17，19，20．

注意，在图 12 中没有画出球击中上边点 21 时球走的路线（“上”表示桌的上边，“下”表示下边）：21 上，21 下，24 上，12 下，18 上．

2．下边有 $\aleph_0$ 个得分点，$\aleph_0$ 个失分点，一个零分点．

3．a．左边 $x=\frac{1}{4}$ 是失分点．球击中左边的点 $x=\frac{1}{4}$ 时，它的路线是（“左”表示桌的左边，“右”表示右边）：

$$\frac{1}{4}\text{左，}1\text{右，}\frac{1}{2}\text{左，}2\text{右，}1\text{左，}4\text{右．}$$

b．右边 $x=\frac{1}{4}$ 是得分点．球击中这一点时，反弹后的路线是：

$\frac{1}{4}$右，$\frac{1}{8}$左，$\frac{1}{2}$右，$\frac{1}{4}$左，1右，$\frac{1}{2}$左，2右，1左，4右。

c. 左边 $x=\frac{1}{3}$ 是得分点. 球击中这一点时，反弹后的路线是：

$\frac{1}{3}$左，$\frac{4}{3}$右，$\frac{2}{3}$左，$\frac{8}{3}$右，$\frac{4}{3}$左。

d. 有，两边的点 $x=0$ 是零分点。

e. 左边　零分点：0

失分点：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…

得分点：所有其余的点。

右边　零分点：0。

得分点：4，2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…

失分点：所有其余的点。

注意：左边失分点的数目等于右边得分点的数目，其余类推。

习题 8

1. $\aleph_2+\aleph_3 \leqslant \aleph_2\aleph_3 = 2^{\aleph_1}2^{\aleph_2}$

$= 2^{\aleph_1+\aleph_2} = 2^{\aleph_2}$（根据例 5）

$= \aleph_3$。

另一方面，$\aleph_3 \leqslant \aleph_2+\aleph_3$。

因此，根据希罗德—伯恩斯坦定理，$\aleph_2+\aleph_3=\aleph_3$。

2. $\aleph_3\times\aleph_4 = 2^{\aleph_2}2^{\aleph_3} = 2^{\aleph_2+\aleph_3} = 2^{\aleph_3}$（根据第 1 题）

$= \aleph_4$。

3. $\aleph_4^{\aleph_4} = (2^{\aleph_3})^{\aleph_4} = 2^{\aleph_3\aleph_4} = 2^{\aleph_4}$（根据第 2 题）

$= \aleph_5$。

4. $\aleph_6$。

5. $\aleph_3^{\aleph_2}\times\aleph_3+\aleph_2^{(\aleph_2\aleph_2)}+\aleph_3^{10}$

$= \aleph_3\times\aleph_3+\aleph_2^{\aleph_2}+\aleph_3$

$= \aleph_3 + \aleph_4 + \aleph_5$

$= \aleph_4$.

6. $\aleph_3 = 2^{\aleph_2} \leqslant 7^{\aleph_2}$.

另一方面，

$$7^{\aleph_2} \leqslant \aleph_1^{\aleph_2} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_2} = 2^{\aleph_0 \aleph_2} = 2^{\aleph_2} = \aleph_3.$$

因此，根据希罗德—伯恩斯坦定理，$7^{\aleph_2} = \aleph_3$.

7. 假设 s 和 t 是两个无限基数，而且 $s \leqslant t$。

那么 $st = t$。 因此 $s^t \leqslant 2^{st} = 2^t$。

另一方面，$2^t \leqslant s^t$，因为 s 是无限数，当然大于2。

根据希罗德—伯恩斯坦定理，$s^t = 2^t$。